JOMTA
Journal of Mathematics: Theory and Applications
Vol. 3, No. 1, 2021, P-ISSN 2685-9653 e-ISSN 2722-2705

Model Matematika pada Penyakit Diabetes Melitus dengan Faktor Genetik dan Faktor Sosial

Karlina Kaya', Darmawati*, Darma Ekawati
Program Studi Matematika, Universitas Sulawesi Barat, Indonesia
e-mail: darmath@unsulbar.ac.id

Abstrak. Diabetes melitus (DM) adalah penyakit yang berhubungan dengan metabolisme yang ditandai dengan kenaikan kadar glukosa dalam darah atau hiperglikemi. Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui model matematika pada penyakit diabetes melitus dengan faktor genetik dan faktor sosial. Penelitian ini memperoleh bilangan reproduksi dasar dan dua titik kesetimbangan yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Pada akhir penelitian, diberikan simulasi model dengan menggunakan aplikasi *maple.*
Kata Kunci: diabetes mellitus, model matematika, faktor genetik, faktor sosial.

Abstract *Diabetes mellitus (DM) is a disease related to metabolism which is characterized by an increase in blood glucose levels or hyperglycemia. The purpose of this study was to determine the dynamics of the spread of DM using a mathematical model, namely a model that pays attention to genetic factors and social factors. This study obtained the basic reproduction number and the disease-free equilibrium point as well as the endemic equilibrium point. At the end of the study, a model simulation using the maple application was given to support the given theory.*
Key Words : *diabetes melitus, mathematical model, genetic inheritance, environmental factors*.

I. PENDAHULUAN

Penyakit gula atau biasa disebut dengan kencing manis yang dalam istilah medisnya disebut Diabetes Melitus (DM) adalah penyakit yang berhubungan dengan metabolisme yang ditandai dengan kenaikan kadar glukosa dalam darah atau hiperglikemi. Makanan-makanan yang siap saji juga salah satu penyebab terjadinya diabetes melitus karena dalam makanan siap saji terdapat kandungan gula yang sangat tinggi yang dapat menyebabkan metabolisme akan tertekan dan juga dalam makanan siap saji tidak terdapat banyak mengandung nutrisi yang dibutuhkan oleh tubuh. Berolahraga yang teratur dan menjaga pola makan adalah salah satu faktor untuk melawan penyakit diabetes melitus.

Beberapa peneliti telah melakukan pengembangan model matematika yang membahas tentang diabetes melitus, diantanya yaitu yang dalam artikelnya mengkaji tentang analisis model matematika penyebaran penyakit diabetes dengan faktor genetik yaitu model epidemi SEI. Pada populasi SEI, populasi dibagi menjadi tiga subpopulasi yaitu subpopulasi individu rentan *(Susceptible*), subpopulasi individu laten *(Exposed*), dan subpopulasi individu yang terinfeksi *(Infected*) [1].

Berdasarkan latar belakang diatas yang membahas tentang penyakit diabetes melitus masih menggunakan model epidemi yang sederhana yaitu SEI, sehingga penulis tertarik mengembangkan penelitian tersebut dengan kasus yang berbeda yaitu model matematika pada penyakit diabetes melitus dengan faktor genetik dan faktor sosial yaitu model S_pI_pGTSI. Pada populasi S_pI_p GTSI, populasi dibagi menjadi enam subpopulasi yaitu subpopulasi individu yang sehat dan rentan terhadap penyakit dengan faktor genetik (S_p), subpopulasi individu yang terinfeksi dengan faktor genetik (I_p), subpopulasi dengan berita/edukasi tentang hidup sehat tanpa diabetes *(G),* subpopulasi individu yang melakukan perawatan karena pengaruh berita/edukasi hidup sehat tanpa diabetes (T), subpopulasi individu yang sehat dan rentan terhadap penyakit dengan faktor soaial (S) dan subpolasi individu yang terinfeksi dengan faktor sosial (I).

II. LANDASAN TEORI

Pemodelan matematika merupakan salah satu terapan ilmu matematika yang mempresentasikan permasalahan di dunia nyata kedalam pernyataan matematika.

Definisi 2.1 [2]
Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas.

Persamaan diferensial diklasifikasikan menjadi dua berdasarkan jumlah variabel bebas yang terlibat yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial. Berikut ini merupakan definisi dari persamaan diferensial biasa.

Definisi 2.2 [2]

Persamaan diferensial biasa yaitu suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas.

Definisi 2.3 [2]
Persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tak bebas terhadap dua atau lebih variabel bebas.

2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Klasifikasi yang lain dari persamaan yaitu terdapat satu fungsi dan terdapat dua atau lebih fungsi yang tak diketahui. Jika terdapat satu fungsi yang harus ditentukan maka cukup satu persamaan. Namun, jika terdapat dua atau lebih fungsi yang tidak diketahui maka diperlukan suatu sistem persamaan [3].

Definisi 2.4 [4]
Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n persamaan diferensial, dengan n fungsi yang tak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua atau lebih. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling terkait dan konsisten.

Bentuk umum dari suatu n persamaan orde pertama memiliki bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $x_1, x_2, ..., x_n$ adalah variabel bebas dan t adalah variabel terikat, sehingga $x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), ..., x_n = x_n(t),$ dimana $\frac{dx_n}{dt}$ merupakan derivatif fungsi x_n terhadap t , dan f_n adalah fungsi yang tergantung pada variabel $x_1, x_2, ..., x_n$ dan t. kumpulan persamaan diferensial biasa dalam persamaan (2.1) yang mempunyai hubungan disebut sistem persamaan diferensial biasa dapat juga dituliskan sebagai berikut:

$$\bar{x} = f(t, x), \bar{x} \in R^n \tag{2}$$

dengan $\bar{x} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, ..., \frac{dx_n}{dt}\right), f = f_1, f_2, ..., f_n$

dan $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ adalah fungsi-fungsi bernilai riil yang redefinisi dalam ruang *Euclid R* berdimensi *n*. dinotasikan dalam ruang *(x,t)* [3].

Sistem persamaan diferensial terbagi menjadi dua yaitu sistem persamaan diferensial linier dan sistem persamaan diferensial nonlinier.

2.*1.1 Sistem Persamaan Diferensial Linier*

Sistem persamaan diferensial linier adalah sistem persamaan yang terdiri dari *n* buah persamaan diferensial linier dengan *n* buah fungsi tak diketahui berbentuk:

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + ... + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x'_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + ... + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ &\vdots \\ x'_n &= a_{n-1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + ... + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned} \tag{3}$$

Sistem persamaan diferensial linier dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$x'_1 = a(t)x_1 + b(t)x_2 + f_1(t) \quad x'_2 = c(t)x_1 + d(t)x_2 + f_2(t) \tag{4}$$

dimana fungsi $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ dan f_1, f_2 merupakan fungsi *t* yang kontinu pada suatu selang I, sedangkan x_1 dan x_2 adalah fungsi *t* yang tak diketahui.

2.1.2 Sistem Persamaan Diferensial Non Linier

Sistem persamaan diferensial non linier adalah persamaan yang terdiri atas lebih dari satu persamaan yang saling terkait.

Persamaan diferensial dikatakan nonlinier jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari kriteria berikut [2]:

1. Memuat variabel tak bebas dari turunan-turunannya berpangkat selain satu.
2. Terdapat perkalian dari variabel tak bebas atau turunan-turunannya
3. Terdapat fungsi transcendental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

2.2 Kestabilan Titik Kesetimbangan

Suatu sistem dinamis dikatakan berada dalam keadaan setimbang jika sistem tersebut tidak berubah sepanjang waktu atau kedua persamaan diferensial sama dengan nol. Titik kesetimbangan dapat diklasifikasikan menjadi dua titik yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik penyakit. Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah titik kesetimbangan bebas kelas terinfeksi nol atau saat penyakit tidak menyebar dalam populasi. Titik kesetimbangan endemik penyakit adalah titik kesetimbangan saat kelas terinfeksi tidak nol atau saat penyakit menyebar dalam populasi. Adapun definisi tentang titik kesetimbangan adalah sebagai berikut:

Definisi 2.4 [5]
Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan dari suatu sistem persamaan diferensial $\dot{x} = f(\bar{x})$ jika $f(\bar{x}) = 0$.

Definisi 2.5 [5]
Titik kesetimbangan $\bar{x} \in R^n$ dari sistem $\dot{x} = f(\bar{x})$ dikatakan

1. *Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi sistem $\dot{x} = f(x)$ yang memenuhi $\|xt_0 - \bar{x}\| < \delta$ berlaku $\|xt - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq t_0$;*
2. *Stabil asimtotik lokal jika titik kesetimbangan $\bar{x} \in R^n$ stabil dan terdapat bilangan $\delta_0 > 0$ sehingga untuk setiap solusi x(t) yang memiliki $\|xt_0 - \bar{x}\| < \delta_0$ berlaku* $\lim_{t \to \infty} xt = \bar{x};$.
3. *Tidak stabil jika titik kesetimbangan $\bar{x} \in R^n$ tidak memenuhi (1).*

2.3 Linearisasi

Linearisasi adalah suatu proses mengubah sistem persamaan diferensial non linier menjadi sistem persamaan diferensial linier. Linearisasi digunakan untuk mengetahui kestabilan suatu sistem persamaan diferensial. Untuk mencari hasil pelinieran dari persamaan diferensial non linear digunakan matriks Jacobian.

Definisi 2.6 [6]
Diberikan fungsi $f=(f_1,\ldots,f_n)$ *pada sistem* $\dot{x}=f(\bar{x})$ *dengan* $f_i\in C^1(E), i=1,2,\ldots,n,$ *dimana* $E\subseteq R^n$ *adalah himpunan terbuka dan* $f_i\in C^1(E)$ *dengan* $C^1(E)$ *adalah himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di E. Matriks*

$$Jf(\bar{x})=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x})\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\bar{x})\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x})\end{bmatrix} \tag{5}$$

dinamakan matriks jacobian dari f dititik $\bar{x}\in R^n$.

2.4 Nilai Eigen

Nilai eigen digunakan untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial. Berikut merupakan definisi vektor eigen:

Definisi 2.8 [7]
Jika A matriks n x n, vektor tak nol $\bar{x}$ *dalam* R^n *disebut vektor eigen (eigenvector) dari A jika* $A\bar{x}$ *merupakan kelipatan skalar dari* $\bar{x}$ *yaitu* $A\bar{x}=\lambda\bar{x}$ *untuk suatu skalar* λ. *Skalar* λ *dinamakan nilai eigen dari A dan* $\bar{x}$ *dinamakan vektor eigen yang bersesuaian dengan* λ. *selanjutnya untuk mencari nilai-nilai eigen dari matriks A yang berukuran n x n maka dapat dituliskan kembali menjadi*

$$\begin{aligned}&A\bar{x}=\lambda\bar{x}\\ &A\bar{x}=\lambda I\bar{x}\\ &\bar{x}(\lambda I-A)=0\\ &\bar{x}=0 \text{ atau } A=\lambda I\end{aligned} \tag{6}$$

agar λ *menjadi nilai eigen maka haruslah ada solusi tak nol dari persamaan tersebut, dengan I adalah matriks identitas.*

Teorema 2.1 **[7]**
Jika A adalah matriks n x n dan λ *adalah suatu bilangan riil, maka pernyataan-pernyataan berikut ini adalah.*

i) λ *adalah suatu nilai eigen dari A.*
ii) Sistem persamaan $(A-\lambda I)\bar{x}=0$ *memiliki solusi nontrivial.*
iii) λ *adalah suatu penyelesaian riil dari persamaan karakteristik det* $(A-\lambda I)=0$.

Bukti:
Akan ditunjukkan bahwa a, b, c, dan ekuivalen satu sama lainnya dengan urutan implikasi $a\Rightarrow b\Rightarrow c\Rightarrow a$.

$a\Rightarrow b$

Karena λ adalah nilai-nilai eigen dari matriks *A*, maka menurut definisi nilai eigen berlaku $A\bar{x}-\lambda\bar{x}$ dengan $\bar{x}$ tak nol.

$$\Leftrightarrow A\bar{x}-I\lambda\bar{x}=0$$
$$\Leftrightarrow (A-I\lambda)\bar{x}=0$$

karena $\bar{x}$ tak nol maka sistem persamaan linier homogen $(A-\lambda I)\bar{x}=0$ harus mempunyai penyelesaian non trivial.

$b\Rightarrow c$

Karena $(A\bar{x}=\lambda\bar{x})$ maka

$$\Leftrightarrow A\bar{x}=I\lambda\bar{x}$$
$$\Leftrightarrow (A-I\lambda)\bar{x}=0$$

Karena ada $\bar{x}$ tak nol, maka sistem persamaan linier homogen $(A-I\lambda)\bar{x}=0$ haruslah det $(A-\lambda I)=0$ dengan λ adalah suatu penyelesaian riilnya.

$c\Rightarrow a$

Karena λ adalah penyelesaian riil dari persamaan det $(A-\lambda I)=0,$ maka λ adalah penyelesaian dari persamaan karakteristik det $(A-\lambda I)=0$ atau dengan kata lain λ adalah nilai matriks *A*. ■

2.5 Kriteria Kestabilan Routh Hurwitz

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz adalah suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinomial adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu system [8].

Prosedur dalam kriteria Routh-Hurwitz yaitu sebagai berikut:

1. Menuliskan polinomial dalam λ sesuai dengan bentuk berikut:
$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \tag{7}$$
dimana koefisien-koefisien adalah besaran nyata $a_n\neq 0$.
2. Jika ada koefisien-koefisien bernilai nol atau negatif dimana paling tidak terdapat satu koefisien bernilai positif maka terdapat satu atau lebih akar kompleks yang mempunyai bagian rill positif, oleh karena itu sistem tidak stabil. Agar diperoleh akar yang mempunyai bagian riil yang negatif, maka semua koefisien bernilai positif belum cukup untuk menjamin kestabilan.
3. Jika semua koefisien bernilai positif, susunlah koefisien polinomial pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Tabel Routh Hurwitz

Variabel	Koefisien					
λ^n	a_0	a_2	a_4	a_6	$\cdots$	a_{n-1}
λ^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	$\cdots$	a_n
λ^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	$\cdots$	b_n
λ^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	$\cdots$	c_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$				

λ^2	e_1	e_2
λ^1	f_1	
λ^0	g_1	

dengan koefisien-koefisien:

$$b_1 = \frac{a_1a_2 - a_0a_3}{a_1} \qquad c_1 = \frac{b_1a_3 - a_1b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1a_4 - a_0a_5}{a_1} \qquad c_2 = \frac{b_1a_5 - a_1b_3}{b_1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$b_n = \frac{a_1a_{2n} - a_0a_{2n+1}}{a_1} \qquad c_n = \frac{b_1a_{2n+1} - a_1b_{n+1}}{b_1}$$

4. Banyaknya akar tak stabil dapat dilihat dari banyaknya perubahan tanda pada kolom pertama Tabel 1.
5. Syarat perlu untuk stabil adalah semua pada suku pada kolom pertama Tabel 1.

Kriteria Routh-Hurwitz tidak dapat menjelaskan langkah memperbaiki kestabilan relatif atau pun menstabilkan sistem tak stabil, tetapi dapat digunakan untuk menentukan batas penguatan suatu sistem agar tetap stabil [8].

2.6 *Bilangan Reproduksi Dasar*

Bilangan Reproduksi dasar *(R_0)* merupakan salah satu bilangan yang paling sering dikaji dalam bidang epidemiologi. Bilangan reproduksi dasar sudut pandang epidemiologi didefinisikan sebagai rata-rata jumlah infeksi baru pada populasi rentan yang dihasilkan oleh satu orang terinfeksi.

Secara umum bilangan R_0 mempunyai tiga kemungkinan yang akan muncul antara lain:

1. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit tidak akan menyerang populasi atau akan menghilang.
2. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap.
3. Jika $R_0 > 1$ maka kemungkinan penyakit akan menyebar sangat besar atau penyakit akan mewabah.

Bilangan reproduksi dasar dapat ditentukan dengan menggunakan matriks generasi selanjutnya. Prosedur dalam menentukan R_0 sebagai berikut [9]:

1. Model epidemiologi terdiri dari n kompartemen dinyatakan sebagai berikut:
$$\frac{dx_i}{dt} f_i(\bar{x}, \mu) \tag{8}$$
dengan i = 1,2,…,n.
2. Kompartemen disusun sehingga $m < n$ kompartemen pertama adalah kompartemen penyakit (terinfeksi, terekspos, virus, parasit, bakteri).
3. Berdasarkan (a) dan (b), diperoleh $g_i(\bar{x}, \mu) = P_i(\bar{x}, \mu) - V_i^{+}(\bar{x}, \mu)$ dengan $V_i(\bar{x}, \mu) = V_i^{-}(\bar{x}, \mu) - V_i^{+}(\bar{x}, \mu)$ untuk *I = 1, 2, … , n. P* dan $V \in C^2$.
4. P_i adalah tingkat infeksi baru, V_i^{+} adalah tingkat transisi individu keluar dari kompartemen I.
5. Misalkan $\bar{x}$ adalah titik kesetimbangan bebas penyakit maka laju infeksi baru *(P)* dan transfer individu keluar dari subpopulasi I *(V)* dinyatakan
$$P = \left[\frac{\partial P_i}{\partial x_j}(\bar{x}, \mu)\right] \quad \text{dan} \quad V = \left[\frac{\partial V_i}{\partial x_j}(\bar{x}, \mu)\right] \quad \text{dengan}$$
$1 \le i,\ j \le m.$
6. $R_0 = (PV^{-1})$ dengan $\rho(PV^{-1})$ adalah spektral radius nilai nilai eigen dominan matriks PV^{-1} . ρ merupakan nilai eigen dominan titik bebas penyakit dan Matriks PV^{-1} merupakan matriks jacobian.

III. METODE

Penelitian ini menggunakan referensi dari jurnal dan literatur lain yang berkaitan dengan model matematika pada penyakit diabetes melitus dengan faktor genetik dan faktor sosial. Pada penelitian ini akan mengkaji masalah atau topik yang akan dimodelkan, kemudian membuat asumsi serta variabel untuk membangun suatu model tentang penyakit diabetes melitus dengan faktor genetik.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 *Model Matematika*

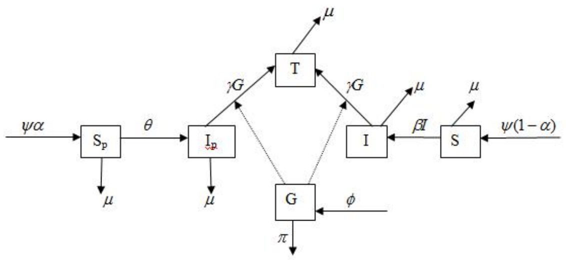
Model matematika pada penyakit diabetes melitus yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah model matematika dengan faktor genetik dan faktor sosial. Pada model ini dibagi menjadi enam subpopulasi. Subpopulasi normal atau belum terkena penyakit diabetes melitus dengan faktor genetik (S_p) . Subpopulasi yang terinfeksi dengan faktor genetik (I_p) . Subpopulasi yang menderita diabetes melitus kemudian mendapatkan perawatan dengan insulin dimasukkan kedalam kelas *Treatment* (T). Subpopulasi banyaknya berita edukasi penyakit diabetes melitus (G). Subpopulasi normal atau belum terkena penyakit diabetes melitus dimasukkan dalam kelas *Susceptible* (S). Subpopulasi yang terinfeksi dimasukkan dalam kelas *Infected* (I).

4.1.1 *Asumsi Model Matematika*

Asumsi model matematika SpIpTGSI sebagai berikut:

1. Populasi dibagi kedalam enam subpopulasi, yakni manusia rentan dengan faktor genetik (S_p) , manusia terinfeksi dengan faktor genetik (I_p), manusia yang mendapatkan perawatan (T), manusia yang mempunyai banyak berita edukasi penyakit diabetes melitus (G), manusia rentan (S), manusia terinfeksi dengan faktor sosial (I).
2. Laju pertumbuhan (kelahiran) masuk kedalam subpopulasi manusia rentan, manusia rentan dengan faktor genetik dan banyaknya berita edukasi diabetes melitus.
3. Tidak ada kasus sembuh setelah terinfeksi
4. Individu yang terinfeksi akan melakukan perawatan
5. Semua manusia rentan terhadap penyakit diabetes mellitus

4.1.2 Diagram Model Matematika



Gambar 1. Diagram Model Matematika

Keterangan:

S	=	Jumlah individu yang sehat dan rentan terhadap penyakit dengan faktor sosial
I	=	Jumlah individu yang terinfeksi dengan faktor sosial
S_p	=	Jumlah individu yang sehat dan rentan terhadap penyakit dengan faktor genetik
I_p	=	Jumlah individu yang terinfeksi dengan faktor genetik
G	=	Jumlah berita/edukasi tentang hidup sehat tanpa diabetes
T	=	Jumlah individu yang melakukan perawatan karena pengaruh berita/edukasi hidup sehat tanpa diabetes
μ	=	Laju kematian alami
θ	=	Laju individu rentan dengan faktor genetik menjadi terinfeksi dengan faktor genetik karena keturunan
βI	=	Laju individu yang sehat dan rentan dengan faktor sosial menjadi terinfeksi
γG	=	Laju individu yang terinfeksi dan melakukan perawatan
π	=	Laju berita edukasi yang hilang atau tenggelam dengan berita lain
ψ	=	Proporsi angka kelahiran manusia
φ	=	Proporsi angka kelahiran untuk berita
α	=	Laju pembagian angka kelahiran

Berdasarkan diagram dan uraian diatas, maka penyebaran penyakit diabetes melitus dalam dimodelkan dalam bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\frac{dG}{dt} &= \varphi - \pi G \\
\frac{dS}{dt} &= \psi(1-\alpha) - \beta IS - \mu S \\
\frac{dS_p}{dt} &= \psi\alpha - \mu S_p - \theta S_p \\
\frac{dI_p}{dt} &= \theta S_p - \gamma G I_p - \mu I_p \\
\frac{dT}{dt} &= \gamma G I_p + \gamma G I - \mu T \\
\frac{dI}{dt} &= \beta IS - \gamma G I - \mu I
\end{aligned} \tag{9}
$$

4.2 Titik Kesetimbangan dari Sistem Persamaan

Dalam penelitian ini diperoleh dua titik kesetimbangan, yaitu titik bebas penyakit dan titik endemik. Titik kesetimbangan bebas penyakit yang diperoleh dari sistem adalah

$$
E_0\left(G,S,S_p,I_p,T,I\right) = \left(\frac{\varphi}{\pi}, \frac{\psi(1-\alpha)}{\mu}, \frac{\psi\alpha((\mu(\gamma G^*+\mu)+\theta(\gamma G^*+\mu)))-\theta\psi\alpha(\gamma G^*+\mu)}{(\mu(\gamma G^*+\mu)+\theta(\gamma}, \frac{\theta\psi\alpha}{\mu(\gamma G^*+\mu)+\theta(\gamma G^*+\mu)}, \frac{\gamma G^*\theta\psi\alpha}{\mu(\mu(\gamma G^*+\mu)+\theta(\gamma G^*+\mu))}, 0\right)
$$

Sedangkan titik kesetimbangan endemik sistem adalah

$$
E_1\left(G,S,S_p,I_p,T,I\right) = \left(\frac{\varphi}{\mu}, \frac{e_1(\psi(1-\alpha))+e_2(\gamma G^*+\mu)}{\mu e_1}, \frac{\psi\alpha\left((\mu(\gamma G^*+\mu)+\theta(\gamma G^*+\mu))\right)-\theta\psi\alpha\left(\gamma G^*+\mu\right)}{\left(\mu(\gamma G^*+\mu)+\theta(\gamma G^*+\mu)\right)\mu}, \frac{\theta\psi\alpha}{\mu(\gamma G^*+\mu)+\theta(\gamma G^*+\mu)}, \frac{\gamma G^*(e_1(\theta\psi\alpha))-(e_2(\mu(\gamma G^*+\mu)+\theta(\gamma G^*+\mu)))}{\mu\left(e_1(\mu(\gamma G^*+\mu)+\theta(\gamma G^*+\mu))\right)} \; \frac{-e_2}{e_1}\right)
$$

Dengan menggunakan *Next Generation Matrix*, diperoleh *Basic Reproduction Number* untuk sistem yaitu

$$
R_0 = \frac{\beta(\psi(1-\alpha))}{\mu(\gamma G^*+\mu)} \tag{10}
$$

Selanjutnya, syarat untuk kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit akan dibahas sebagai berikut.

Matriks Jacobian untuk model ini pada titik kesetimbangan bebas penyakit adalah

$$
\begin{bmatrix}
-A & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
B & -C & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & D & -E & F & 0 & D \\
0 & 0 & 0 & -H & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -E & -I \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J
\end{bmatrix}
$$

dengan:

$$
\begin{aligned}
A &= \mu + \theta \\
B &= \theta \\
C &= \gamma G + \mu \\
D &= \gamma G \\
E &= \mu \\
F &= \gamma I_p \\
H &= \pi \\
I &= \beta\left(\frac{\psi(1-\alpha)}{\mu}\right) \\
J &= \beta\left(\frac{\psi(1-\alpha)}{\mu}\right) - \gamma G - \mu
\end{aligned}
$$

Polinom karakteristik yang diperoleh dari matriks di atas adalah

$$
(\lambda + A)(\lambda + C)(\lambda + E)\left((\lambda + H)(\lambda + E)(\lambda - J)\right) = 0
$$

Sehingga jelas bahwa nilai eigen yang diperoleh adalah

$$\lambda_1 = -\mu - \theta < 0$$

$$\lambda_2 = -\mu < 0$$

$$\lambda_4 = -\frac{\gamma\psi}{\pi} - \mu < 0$$

$$\lambda_5 = \frac{\beta\psi(1-\alpha)}{\mu} - \frac{\gamma\psi}{\pi} - \mu$$

$$\lambda_6 = -\pi < 0$$

Selanjutnya adalah syarat untuk kestabilan titik kesetimbangan endemik, dan matriks Jacobian untuk model ini pada titik kesetimbangan endemik adalah

$$\begin{bmatrix} -K & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ L & -M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & -O & Z & 0 & N \\ 0 & 0 & 0 & -Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & -S \\ 0 & 0 & 0 & T & -U & V \end{bmatrix}$$

dengan:

$$K = \mu + \theta$$
$$L = \theta$$
$$M = \gamma G + \mu$$
$$N = \gamma G$$
$$O = \mu$$
$$Z = \gamma I_p - \gamma\left(\frac{e_2}{e_1}\right)$$
$$Q = \pi$$
$$R = \beta\left(\frac{e_2}{e_1}\right) - \mu$$
$$S = -\beta\left(\frac{e_1(\psi(1-\alpha)) + e_2(\gamma G^* + \mu)}{\mu e_1}\right)$$
$$T = \gamma\frac{e_2}{e_1}$$
$$U = -\beta\left(\frac{e_2}{e_1}\right)$$
$$V = \beta\left(\frac{e_1(\psi(1-\alpha)) + e_2(\gamma G^* + \mu)}{\mu e_1}\right) - \gamma G - \mu$$

Sehingga polinom karakteristik yang diperoleh adalah

$$(\lambda + K)(\lambda + M)(\lambda + O)\big((\lambda + Q)(\lambda - R)(\lambda - V) - (U)(S)(\lambda + Q)\big) = 0$$

untuk melihat kestabilan titik endemic, digunakan Tabel 2 sebagai berikut

Tabel 2. Tabel Routh-Hurwitz Titik Kesetimbangan Endemik

Var	Koefisien		
λ^3	1	$RV - QV - Q$	0
λ^2	$V + R - Q$	$QRV - USQ$	0
λ^1	$\frac{(V+R-Q)(RV-QV-QR-US)-(QRV}{V+R-Q}$	0	0
λ^0	$QRV - USQ$	0	0

Semua suku pada kolom pertama Tabel 2 harus bertanda positif agar persamaan menjadi stabil maka haruslah $V + R - Q > 0$,

$$\frac{(V+R-Q)(RV-QV-QR-US)-(QRV-USQ)}{V+R-Q} > 0 \quad \text{dan}$$

$QRV - USQ > 0$.

4.3 Simulasi Numerik

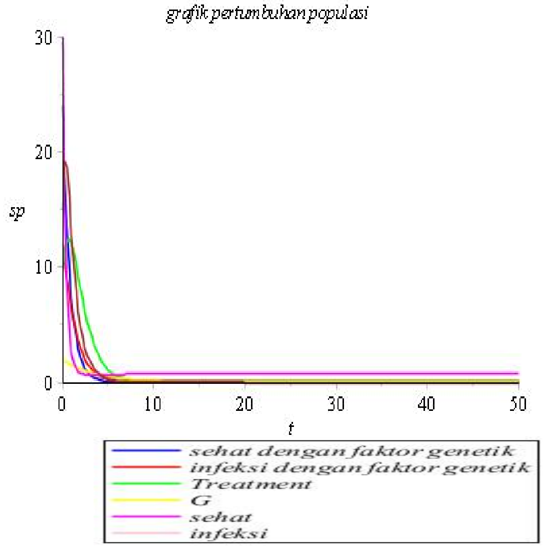
Pada bagian ini, akan dilakukan simulasi numerik untuk nilai $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Simulasi ini dilakukan untuk melihat dinamik dari model yang sudah dibangun, dan mencocokkan hasil yang diperoleh dengan teori yang ada. Adapun nilai-nilai yang digunakan berupa nilai asumsi.

4.3.1 Simulasi numerik untuk $R_0 < 1$

Untuk nilai $R_0 < 1$ digunakan nilai parameter sebagai berikut

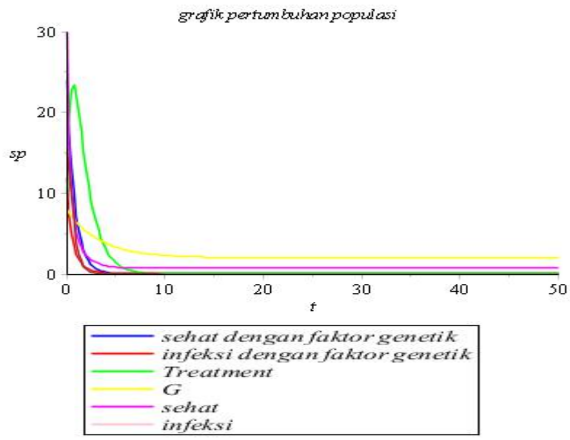
Tabel 3. Nilai parameter untuk $R_0 < 1$

Variabel / Parameter	Nilai
S_p	30
I_p	15
T	10
G	2
S	24
I	12
ψ	0.6
α	0.05
θ	0.4
μ	0.8
γ	0.25
π	0.3
β	0.1
ω	0.2
φ	0.02



Gambar 2. Dinamika S_p, I_p, T, G, S, I untuk $R_0 < 1$

Simulasi model untuk G=8 dapat dilihat pada masing-masing plot subpopulasi S_p, I_p, T, G, S, I sebagai berikut.



Gambar 3. Dinamika S_p, I_p, T, G, S, I untuk G=8

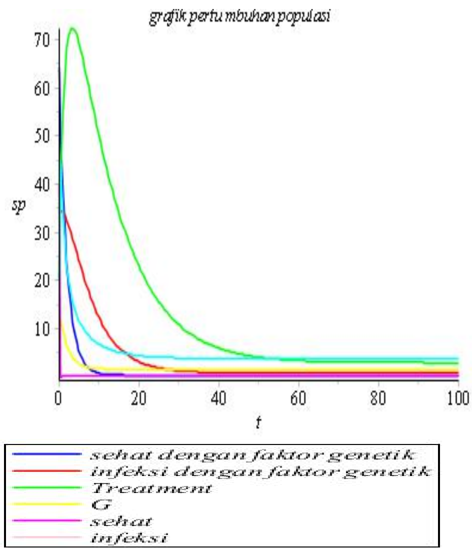
Pada Gambar 2 terlihat bahwa laju pertumbuhan semua sub populasi mengalami penurunan dengan. Hal ini terjadi karena kurangnya angka kelahiran dan adanya kematian alami pada subpopulasi. Sedangkan pada subpopulasi $G = 2$ tetap pada kondisi awal sampai ke minggu 50, dan pada saat G=8 maka mengalami penurunan. Oleh karena itu berdasarkan Gambar 2 penyakit diabetes melitus tidak bersifat endemik dan akan berkurang seiring berjalannya waktu.

4.3.2 Simulasi numerik untuk $R_0 > 1$

Selanjutnya dilakukan simulasi untuk nilai $R_0 > 1$ dengan menggunakan nilai-nilai parameter sebagai berikut

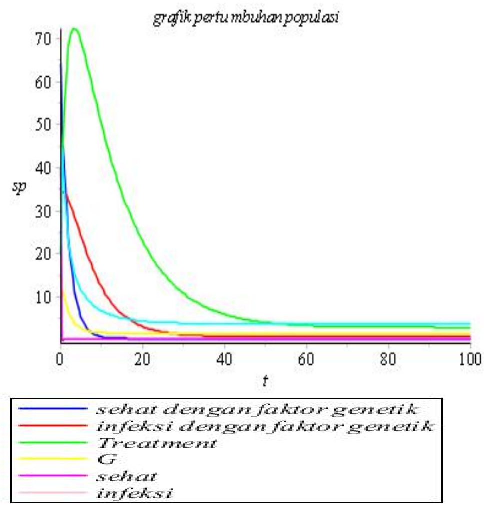
Tabel 4. Nilai parameter untuk $R_0 > 1$

Variabel / Parameter	Nilai
S_p	64
I_p	34
T	5
G	10
S	40
I	20
ψ	0.8
α	0.2
θ	0.4
μ	0.1
γ	0.04
π	0.5
β	1.00
ω	0.02
φ	0.2



Gambar 4. Dinamika S_p, I_p, T, G, S, I untuk $R_0 > 1$

Simulasi model untuk G=15 dapat dilihat pada masing-masing plot subpopulasi S_p, I_p, T, G, S, I sebagai berikut.



Gambar 5. Dinamika S_p, I_p, T, G, S, I untuk G=15

Pada Gambar 3 terlihat bahwa laju pertumbuhan Subpopulasi S_p (garis biru) mengalami penurunan pada 100 minggu, hal ini terjadi karena sedikitnya angka kelahiran dan adanya kematian alami. Laju pertumbuhan I_p (garis merah) mengalami penurunan karena subpopulasi yang terinfeksi melakukan perawatan atau T dan adanya kematian alami. Laju pertumbuhan T (garis hijau) mengalami kenaikan pada 10 minggu terakhir dan mengalami penurunan setelah 10 minggu setelahnya. Hal ini disebabkan adanya penambahan dari subpopulasi yang terinfeksi yaitu I_p dan I, kemudian berkurang karena adanya kematian alami. Laju pertumbuhan G (garis kuning) mengalami penurunan karena kurangnya angka kelahiran dan adanya kematian alami. Laju pertumbuhan S (garis ungu) mengalami penurunan karena kurangnya angka kelahiran dan adanya kematian alami. Laju pertumbuhan I (garis cyan) mengalami penurunan karena subpopulasi yang terinfeksi melakukan perawatan atau masuk ke subpopulasi T. Oleh karena itu berdasarkan Gambar 4 penyakit diabetes melitus akan bersifat endemik dan akan berkurang seiring berjalannya waktu.

IV. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini diperoleh bahwa semakin banyak informasi dan edukasi tentang hidup sehat, maka jumlah penderita diabetes mellitus dapat berkurang.

REFERENSI

[1] Abraham dan Rikardus San.,2015, Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Diabetes Dengan Faktor Genetik. *SAINS, NO.1, Vol.15, 31-32.*

[2] Ross, L. Shepley. 1984. *Differential Equations.* New York University Of New Hasphire.

[3] Boyce, W. E. Dan R. C. Diprima. 2009. *Elementary Differential Equation and Buondary Value Problem*. Ninth Edition. John Wiley and Sons, Inc.USA

[4] Finizo, N. Dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equation With Difference Equation, Fourier, Series, and Partial Differential Equations.* Wadswoth Publishing Company. Belmot, California

[5] Wiggins, S, 1990. *Introduction to Applied Non Linear Dynamical System And Chaos,* New York: Springer-Verlag.

[6] Kocak, H. dan Hale, J. K. *Dynamic and Bifucation, Springer-Verlag,* New York. 1991

[7] Anton, H & Rorres, C. 2014. *Elementary Linear Algebra 11th Edition.* USA: John Wiley & Sons, Inc.

[8] Ndraha Suzanna 2014, *Pemodelan Matematika pada Kelangsungan Hidup Penderita Diabetes Melitus*, Fakultas Kedokteran Universitas Krida Wacana Jakarta. Vol. 27.

[9] Driessche P. van den dan Watmough, James. 2002, Reproduction Number and Sub-Threshold Endemic Equilibria for Compartmental Models of Disease Transmission, *Mathematical Biosciences,* 180 (2002) 29-48.