

Analisis Model Matematika SEITR pada Penyakit Cacar Air

Musarifa¹, Hikmah², Fardinah³,

¹Program Studi Matematika, ^{2,3}Program Studi Statistika, Universitas Sulawesi Barat, Indonesia
e-mail:¹ musarifasuaib@gmail.com, ²hikmah@unsulbar.ac.id., ³fardinah@unsulbar.ac.id.

Abstrak. Penyakit cacar air merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh *varicella zoster virus*. Penyakit menular ini umumnya terjadi pada anak-anak namun dapat juga menyerang orang dewasa dan sifat penularannya yang begitu cepat. Tujuan dari penelitian ini adalah membangun model dan menganalisis model matematika SEITR (*Susceptible-Exposed-Infected-Treatment-Recovered*). Hasil yang diperoleh dari model SEITR terdapat dua titik kesetimbangan yaitu bebas penyakit dan endemik. Analisis model dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk mengidentifikasi nilai eigen. Berdasarkan hasil analisis kestabilan diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik stabil jika syarat hubungan parameter – parameternya terpenuhi. Akhir penelitian, pada simulasi yang telah dilakukan diperoleh bahwa penyakit akan hilang ketika $R_0 < 1$ yaitu 0,58 dan penyakit akan mewabah ketika $R_0 > 1$ yaitu 2,80.

Kata kunci: kestabilan, routh-hurwitz, SEITR

Abstract. Chickenpox is an infectious disease caused by the *varicella zoster virus*. This infectious disease generally occurs not only in children but also attack adults and the nature of its transmission is so capidly. The purpose of this research is to build a model and analyze the SEITR (*Susceptible-Exposed-Infected-Treatment-Recovered*) mathematical model. The results obtained from the SEITR model have two equilibrium points, namely disease-free and endemic. Model analysis was performed using the Routh-Horwitz criteria to identify the eigenvalues. Based on the results of the stability analysis that the disease-free equilibrium point were stable if the condition for the relationship between parameters were met. At the end of the study, on the simulation that has been carried out it is found that this disease will when $R_0 < 1$ is 0,58 and this disease will be epidemic when $R_0 > 1$ is 2,80.

Keywords: stability, routh-hurwitz, SEITR

I. PENDAHULUAN

Penyakit *varicella* atau dikenal dengan cacar air mungkin sudah tidak asing lagi dan merupakan penyakit yang mendunia. Penyakit ini merupakan salah satu penyakit menular yang umumnya terjadi pada anak-anak namun dapat juga menyerang orang dewasa. Di Indonesia, cacar air diduga terjadi pada saat pergantian musim hujan ke musim panas atau sebaliknya. Infeksi cacar air menyerang semua usia dari 5 tahun hingga 9 tahun. Pasien cacar air berusia dibawah 10 tahun terjadi sekitar 90 persen, sangat sedikit terjadi pada orang dewasa. Mengingat kasus cacar air ini banyak menyerang anak-anak, sifat penularannya yang begitu cepat. Penyakit ini sebenarnya dapat sembuh dengan sendirinya. Akan tetapi tidak menutup kemungkinan adanya serangan berulang saat individu tersebut mengalami penurunan daya tahan tubuh. Penyakit ini diberikan penanganan cacar air atau *treatment* seperti edukasi, pengobatan dan perawatan. Untuk edukasi, individu diberikan berupa tentang cara penanganan cacar air, seperti isolasi, cara pengobatan dan cara perawatan ketika terkena penyakit. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu cara untuk menganalisa penyebaran penyakit cacar air ini.

Proses penyebaran penyakit dapat dimodelkan dalam suatu model matematika, salah satunya adalah analisis

model matematika penyebaran penyakit cacar air. Pemodelan matematika adalah penyusunan suatu deskripsi dari beberapa perilaku dunia nyata (fenomena-fenomena alam) ke dalam bagian matematika yang disebut dunia matematika. Pemodelan matematika dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah di berbagai bidang seperti ekonomi, teknik, sains bahkan dunia kedokteran dan bidan keahlian. Model matematika yang digunakan untuk mencari penyelesaian suatu masalah dalam kehidupan nyata dengan menetapkan asumsi-asumsi mendasar dan pencarian solusi model baik secara analisis maupun secara numerik.

Beberapa peneliti telah melakukan pengembangan model matematika tentang penyakit cacar air, diantaranya yaitu [1] yang dalam artikelnya mengkaji tentang penyakit cacar air yaitu analisis kestabilan model epidemik SEIR pada cacar air dengan sistem imunisasi, dimana membahas tiga kasus pada model penyakit cacar air dengan adanya sistem imunisasi seperti pemberian vaksin, dan diberikan kesimpulan bahwa dengan pemberian vaksinasi yang dapat menghambat atau mencegah adanya penyebaran penyakit cacar air. Begitu juga dengan artikel yang membahas tentang perilaku model epidemi penyakit cacar air dengan kontrol vaksinasi untuk menemukan cara efektif mencegah penularan penyakit ini dengan melakukan vaksinasi [2].

Berdasarkan uraian tersebut, penulis tertarik membahas tentang analisis model pada penyebaran penyakit cacar air dengan model SEITR. Penulis ingin melihat analisa penyebaran penyakit ini dengan adanya individu yang melakukan *treatment* pada individu yang terinfeksi dan pengaruh penggunaan vaksin. Individu yang melakukan *treatment* pada individu yang terinfeksi oleh penyakit cacar air akan lebih cepat sembuh daripada yang tidak di *treatment*. Pada model ini diasumsikan bahwa individu yang terinfeksi cacar air dapat sembuh menjadi individu yang *recovered* jika sembuh secara alami atau setelah melalui proses *treatment* dan adanya individu rentan yang divaksin akan memiliki sistem kekebalan tubuh dan masuk ke subpopulasi *recovered*.

II. LANDASAN TEORI

2.1 Cacar Air

Varicella adalah nama latin dari cacar air. Penyakit ini merupakan penyakit sangat menular yang disebabkan oleh virus *varicella zoster virus*. Cacar air dapat menyebar dengan mudah dari orang terinfeksi ke siapapun yang belum terkena cacar air sebelumnya dan belum mendapat vaksin cacar air. Penularan penyakit cacar air dapat terjadi melalui cara yaitu partikel cairan yang dikeluarkan dari mulut pada waktu bersin, batuk atau berbicara yang mengandung kuman penyakit, yaitu virus *Varicella-zoster* yang masuk ke dalam tubuh orang sehat dan melalui kontak langsung. Setelah masuk ke tubuh manusia, virus akan memperbanyak diri dan menyebar ke jaringan setempat melalui aliran darah dan aliran getah bening. Seminggu kemudian, virus ini mulai menyebar ke seluruh tubuh melalui aliran darah dan juga menuju ke kulit sehingga implikasinya bisa menimbulkan begitu banyak benjolan-benjolan yang berisi cairan. Setelah itu, virus ini juga akan kembali masuk ke saluran pernafasan. Melalui saluran pernafasan inilah yang akan menyebabkan virus menyebar ke orang lain [3].

Penyakit ini sebenarnya dapat sembuh dengan sendirinya. Akan tetapi tidak menutup kemungkinan adanya serangan berulang saat individu tersebut mengalami penurunan daya tahan tubuh. Penyakit ini diberikan penanganan cacar air atau *treatment* seperti edukasi, pengobatan dan perawatan. Individu yang terinfeksi oleh penyakit ini yang melakukan *treatment* akan lebih cepat sembuh daripada yang tidak di *treatment*.

2.2 Pemodelan matematika

Pemodelan matematika adalah suatu studi tentang konsep matematika yang merepresentasikan permasalahan di dunia nyata ke dalam pernyataan matematika.

Proses pemodelan matematika dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut

- Memodelkan masalah kehidupan nyata kedalam pengertian matematika.
- Dalam mengkontruksi model, perlu dibuat asumsi.
- Formulasikan model tersebut sesuai asumsi telah dibuat.
- Kemudian menyelesaikan persamaan tersebut secara matematis.
- Interpretasi model atau solusi merupakan suatu langkah yang menghubungkan formula matematika dengan kembali ke masalah dunia nyata.

2.3 Persamaan diferensial

Persamaan diferensial adalah persamaan matematika untuk fungsi satu variabel atau lebih yang menghubungkan nilai fungsi itu sendiri dan turunannya dalam berbagai orde. Persamaan diferensial memuat suatu variabel tak bebas dan variabel bebas. klasifikasi yang lain dari persamaan yaitu terdapat satu fungsi dan terdapat dua atau lebih fungsi yang tidak diketahui. jika terdapat satu fungsi yang harus ditentukan maka cukup satu persamaan [4]. Namun, jika terdapat dua atau lebih fungsi yang tidak diketahui maka diperlukan suatu sistem persamaan.

Definisi 1.

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat n persamaan diferensial, dengan n fungsi yang tidak diketahui, dimana n merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua atau lebih [5]. Antara persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling terkait dan konsisten.

Sistem persamaan diferensial linear adalah sistem persamaan yang terdiri dari n buah persamaan diferensial linear dengan n buah fungsi tak diketahui berbentuk.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ \dot{x}_2 &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t) \end{aligned} \quad (1)$$

...

$$\dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

Persamaan diferensial non linear adalah persamaan diferensial biasa yang tak linear. Persamaan diferensial dikatakan non linear jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari kriteria berikut [6].

- Memuat variabel tak bebas dari turunan-turunannya berpangkat selain satu.
- Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan atau turunan-turunannya.
- Terdapat fungsi transendental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

2.4 Titik Kesetimbangan

Titik kesetimbangan merupakan solusi dari suatu sistem yang menjadikan sistem tidak berubah terhadap waktu. Berikut diberikan definisi titik kesetimbangan.

Definisi 2.

Titik $\bar{x} \in R^n$ disebut titik kesetimbangan jika $f(\bar{x}) = 0$ [7].

2.5 Linearisasi

Analisis kestabilan sistem persamaan diferensial tak linear dapat dilakukan melalui linearisasi. Untuk mencari hasil linearisasi dari persamaan diferensial tak linear digunakan matriks Jacobian.

Definisi 3.

Diberikan fungsi $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem $\dot{x} = f(x)$ dengan $f_i \in C^1(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$ dimana $E \subseteq R^n$ adalah himpunan terbuka dan $f_i \in C^1(E)$ dengan C^1 merupakan notasi untuk himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di C [8].

Matriks

$$Jf(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad (2)$$

dinamakan matriks Jacobian dari f di titik $\bar{x} \in R^n$.

Definisi 4.

Sistem linear $\hat{x} = Jf(\bar{x})(x - \bar{x})$ disebut linearisasi sistem nonlinear $\hat{x} = f(\bar{x})$ disekitar titik $\bar{x} \in R^n$. [7]

2.6 Nilai Eigen

Nilai eigen digunakan untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial. Berikut merupakan definisi nilai eigen.

Definisi 5.

Jika A matriks $n \times n$, maka vektor tak nol \bar{x} dalam R^n disebut vektor eigen dari A jika $A\bar{x}$ merupakan kelipatan skalar dari \bar{x} , yaitu :

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \quad (3)$$

Untuk suatu skala λ . Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan \bar{x} dinamakan vektor yang bersesuaian dengan skalar λ . Selanjutnya untuk mencari nilai-nilai eigen dari matriks A [9].

Persamaan (2) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} A\bar{x} &= \lambda\bar{x} \\ A\bar{x} &= I\lambda\bar{x} \\ (A - \lambda I)\bar{x} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

dengan I adalah matriks identitas.

Adapun teorema hubungan antara nilai eigen dengan kestabilan titik kesetimbangan sebagai berikut.

Teorema 1.

Diberikan sistem persamaan diferensial $\hat{x} = A\bar{x}$ dengan A suatu matrik $n \times n$ yang mempunyai k nilai eigen berbeda $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ dengan $k \leq n$ [10].

1. Titik kesetimbangan $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika $R_e(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.
2. Titik kesetimbangan $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil jika dan hanya jika $R_e(\lambda_i) < 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$ dan jika setiap nilai eigen λ_i imajiner dengan $R_e(\lambda_i) = 0$ maka multiplitas aljabar dan geometri untuk nilai eigen harus sama.
3. Titik kesetimbangan $\bar{x} = 0$ dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika $R_e(\lambda_i) > 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$.

2.7 Kriteria Routh-Hurwitz

Kriteria Routh-Hurwitz merupakan suatu metode analisis yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Syarat perlu untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama tabel Routh bertanda positif.

a. Persamaan polinom orde ke n ditulis dalam bentuk :

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

dengan koefisien-koefisien adalah besaran nyata $a_n \neq 0$.

b. Bila semua koefisien positif, lalu buat tabel Routh seperti pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Routh Hurwitz

variabel	Koefisien			
λ^n	a_0	a_1	\dots	a_{n-1}
λ^{n-1}	b_1	b_2	\dots	b_n
λ^{n-2}	c_1	c_2	\dots	c_n
\vdots				
λ^1	f_1			
λ^0	g_1			

dengan koefisien-koefisien:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \\ b_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} & c_2 &= \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \\ b_3 &= \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} & c_3 &= \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \\ &\vdots & & \vdots \\ b_n &= \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1} & c_n &= \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1} \end{aligned}$$

2.8 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar disebut suatu parameter khas pada model penyebaran penyakit dinotasikan dengan R_0 . Bilangan reproduksi dasar merupakan jumlah rata-rata banyaknya individu yang terinfeksi akibat tertular oleh suatu individu oleh salah satu individu yang terinfeksi sebelumnya [11]. Kemudian mencari bilangan reproduksi dasar menggunakan metode next generation matrix (R_0) pada model kompartemen penyebaran penyakit.

Model kompartemen dapat ditulis sebagai berikut.

$$x_i = F_i - V_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

dengan x_i menyatakan jumlah individu pada setiap kompartemen i . F_i menyatakan komponen pembentuk matriks F yang merupakan infeksi baru yang masuk pada kompartemen ke- i . V_i menyatakan komponen pembentuk matriks V yang merupakan transfer keluar atau masuk dari kompartemen satu ke kompartemen lainnya. F dan V didefinisikan sebagai matriks $m \times m$ dalam bentuk sebagai berikut.

$$F = \left(\frac{dF_i(\epsilon_0)}{dx_j} \right) \quad \text{dan} \quad V = \left(\frac{dV_i(\epsilon_0)}{dx_j} \right)$$

$i, j = 1, \dots, m$

Next generation matriks didefinisikan

$$K = FV^{-1} \quad (5)$$

Pendekatan yang digunakan untuk menentukan bilangan reproduksi dasar adalah *next Generation Matrix* yaitu

$$R_0 = \rho(K) = \rho(FV^{-1}) \quad (6)$$

Persamaan (5) merupakan spektral radius atau nilai eigen dominan matriks [11].

Secara umum bilangan R_0 mempunyai dua kemungkinan yang akan timbul yaitu:

1. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang.
2. Jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan menjadi wabah.

III. METODE

Guna mencapai tujuan penelitian maka prosedur pelaksanaan penelitian diterapkan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mengkaji, mempelajari buku, jurnal, dan referensi lain yang berkaitan dengan persamaan diferensial dan analisis kestabilan, serta bagaimana proses penularan penyakit cacar air.
2. Mengkontruksi model matematika penyakit cacar air. Langkah-langkah yang dilakukan dalam mengkontruksi model penyebaran cacar air ini adalah sebagai berikut
 - a. Membuat asumsi yang termuat dari masalah tersebut
 - b. Buatlah diagram atau bagan untuk memudahkan atau menentukan hubungan yang ada antara unsur-unsur dari variabel yang diketahui
 - c. Formulasikan model matematika yang dicari dalam bentuk persamaan
3. Menganalisis model

Langkah-langkah yang dilakukan dalam menganalisis model penyebaran cacar air ini adalah sebagai berikut.

 - a. Mencari titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik dari model matematika yang sudah dibuat
 - b. Mencari bilangan reproduksi dasar dari model SEITR
 - c. Menlinearisasi model SEITR penyakit cacar air
 - d. Menentukan nilai eigen dan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz
4. Melakukan simulasi numerik untuk melihat simulasi populasi penyebaran penyakit cacar air.
5. Interpretasi dan kesimpulan

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Model matematika pada penyakit cacar air ini terbagi dalam lima subpopulasi, yaitu *susceptible*, *exposed*, *infected*, *treatment*, dan *recovered*. Individu yang termasuk dalam subpopulasi *susceptible* adalah manusia yang sudah rentan dengan virus cacar air. Individu yang termasuk dalam subpopulasi *exposed* adalah individu yang memperlihatkan gejala yang terkena virus cacar air. Individu yang termasuk dalam subpopulasi *infected* adalah individu rentan yang mengalami kontak dengan individu yang terinfeksi dengan cacar air, sehingga individu tersebut menjadi terinfeksi. Individu yang termasuk dalam subpopulasi *treatment* adalah individu yang telah melakukan penanganan penyakit seperti pengobatan dan perawatan. Individu yang termasuk dalam subpopulasi *recovered* adalah individu yang sudah sembuh dari cacar air.

4.1 Model Matematika

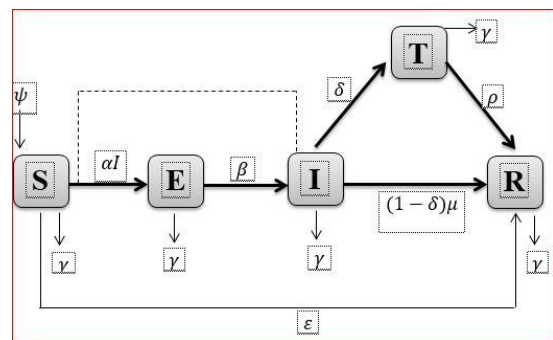
Pemodelan matematika pada penyebaran penyakit cacar air menggunakan model matematika SEITR (*Susceptible-Exposed-Infected-Treatment-Recovered*).

4.2 Asumsi dan Model Matematika

Untuk membuat model, maka hal yang pertama yang harus dilakukan membentuk asumsi-asumsi sebagai berikut.

1. Populasi dalam model penyebaran penyakit cacar air ini dibagi menjadi lima subpopulasi, yaitu subpopulasi rentan (S), subpopulasi *Exposed* (E), subpopulasi terinfeksi atau *Infected* (I), subpopulasi *treatment* (T), dan subpopulasi sembuh atau *Recovered* (R).
2. Populasi diasumsikan tertutup.
3. Setiap kelahiran masuk ke dalam subpopulasi subpopulasi rentan (S).
4. Laju kematian alami dalam setiap subpopulasi
5. Individu yang telah divaksin akan memperoleh kekebalan tubuh.
6. adanya kontak individu rentan dengan individu terinfeksi.
7. Individu yang diberi *treatment* diasumsikan tidak akan meninggal karena penyakit cacar air.

4.3 Diagram model matematika



Gambar 1. Diagram model SEITR Varicella

Keterangan:

- S = jumlah populasi rentan
- E = jumlah individu yang bergejala
- I = jumlah individu yang terinfeksi
- T = jumlah individu di treatment
- R = jumlah individu yang sembuh
- ψ = laju recruitment
- ϵ = proporsi invidu yang divaksin
- α = laju kontak individu rentan dengan individu yang terinfeksi
- γ = laju kematian alami dalam setiap populasi
- β = laju individu laten menjadi terinfeksi
- δ = laju individu yang di treatment
- ρ = laju perpindahan individu ke subpopulasi sembuh akibat treatment
- μ = laju perpindahan individu ke subpopulasi sembuh tanpa treatment
- — \Rightarrow hubungan tidak langsung antara individu terinfeksi dengan individu *exposed*

Berdasarkan diagram di atas, maka penyebaran penyakit cacar air dapat dimodelkan dalam bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \psi - \alpha SI - \epsilon S - \gamma S$$

$$\frac{dE}{dt} = \alpha SI - (\beta + \gamma)E$$

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= \beta E - (\delta + \mu(1-\delta) + \gamma)I \\ \frac{dT}{dt} &= \delta I + \rho T - \gamma T \\ \frac{dR}{dt} &= \mu(1-\delta)I + \rho T + \varepsilon S - \gamma R\end{aligned}\quad (7)$$

4.4 Titik Keseimbangan dari Sistem Persamaan

Titik kesetimbangan atau titik tetap dari sistem persamaan diperoleh jika $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dV}{dt} = 0, \frac{dE}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0, \frac{dR}{dt} = 0$. Titik kesetimbangan dari persamaan dibagi dua yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan endemik. Berdasarkan sistem persamaan tersebut diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit pada penyakit varicella adalah $E_0 = (S_0, I_0, E_0, T_0, R_0) = \left(\frac{\psi}{(\varepsilon + \gamma)}, 0, 0, 0, \frac{\varepsilon \psi}{\gamma(\varepsilon + \gamma)} \right)$. Jadi,

diperoleh titik kesetimbangan endemik pada penyakit varicella adalah $E_1 = (S_1, I_1, E_1, T_1, R_1) = \left(\frac{(\gamma + \mu(1-\delta) + \gamma)(\beta + \gamma)}{\beta\alpha}, \frac{\psi\beta\alpha - (\varepsilon + \gamma)(\gamma + \mu(1-\delta) + \gamma)(\beta + \gamma)}{\beta\alpha(\beta + \gamma)}, \frac{\psi\beta\alpha - (\varepsilon + \gamma)(\delta + \rho(1-\delta) + \gamma)(\beta + \gamma)}{\alpha(\delta + \rho(1-\delta) + \gamma)(\beta + \gamma)}, \frac{\delta(\psi\beta\alpha - (\varepsilon + \gamma)(\delta + \mu(1-\delta) + \gamma)(\beta + \gamma))}{\alpha(\delta + \mu(1-\delta) + \gamma)(\beta + \gamma)(\rho + \gamma)}, \frac{\rho(1-\delta)(\psi\beta\alpha - (\varepsilon + \gamma)d)\beta(\rho + \gamma) + \rho\delta(\psi\beta\alpha - (\varepsilon + \gamma)d) + \alpha d^2(\rho + \gamma)}{\gamma\beta\alpha d(\rho + \gamma)} \right)$.

dimana: $d = (\delta + \mu(1-\delta) + \gamma)(\beta + \gamma)$

4.5 Bilangan Reproduksi Dasar

Berdasarkan lima subpopulasi yang ada, terdapat dua subpopulasi yang terinfeksi yaitu E dan I Sehingga persamaannya adalah.

$$\frac{dE}{dt} = \alpha SI - (\beta + \gamma)E \quad (8)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta E - (\gamma + \mu(1-\delta) + \delta)I$$

Ruas kanan dikelompokkan menjadi dua suku yakni suku pertama yang terkait dengan kejadian infeksi baru yang baru masuk pada masing-masing kompartemen disimbolkan dengan F dan suku kedua yang terkait dengan transisi atau transfer/keluar dari kompartemen satu ke lainnya disimbolkan dengan V .

$$\begin{bmatrix} \frac{dE}{dt} \\ \frac{dI}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha SI \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\beta + \gamma)E \\ -\beta E + (\gamma + \mu(1-\delta) + \delta)I \end{bmatrix}$$

Diperoleh

$$F = \begin{bmatrix} \alpha SI \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$V = \begin{bmatrix} (\beta + \gamma)E \\ -\beta E + (\gamma + \mu(1-\delta) + \delta)I \end{bmatrix} \quad (10)$$

Kemudian persamaan (9) dan (10) diturunkan terhadap E dan I dengan menggunakan matriks Jacobian. Kemudian substitusikan nilai titik kesetimbangan bebas penyakit sehingga

$$F_0 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \frac{\psi}{\varepsilon + \gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ dan}$$

$$V_0 = \begin{bmatrix} \beta + \gamma & 0 \\ -\beta & \gamma + \mu(1-\delta) + \delta \end{bmatrix}$$

Sebelum menentukan *Next Generation Matrix* nya terlebih dahulu mencari invers matriks V_0

$$\begin{aligned}V_0^{-1} &= \frac{1}{\det V} \text{adj} V \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta + \gamma} & 0 \\ \frac{\beta}{(\beta + \gamma)(\gamma + \mu(1-\delta) + \delta)} & \frac{1}{\gamma + \mu(1-\delta) + \delta} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Kemudian dibentuk NGM yaitu $K = F_0 V_0^{-1}$

$$K = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\alpha \psi}{\varepsilon + \gamma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\beta + \gamma} & 0 \\ \frac{\beta}{(\beta + \gamma)(\gamma + \mu(1-\delta) + \delta)} & \frac{1}{\gamma + \mu(1-\delta) + \delta} \end{bmatrix}$$

Kemudian untuk mencari nilai eigen, dapat dilakukan dengan cara mengoperasikan matriks K dengan matriks identitas yang telah dicari dengan λ dan dideterminasikan sehingga

$$|K - \lambda I| = 0$$

diperoleh $-\lambda_2 = 0$, atau

$$\frac{\alpha \psi \beta}{(\varepsilon + \gamma)(\beta + \gamma)(\gamma + \mu(1-\delta) + \delta)} = \lambda_1$$

maka diperoleh

$$\begin{aligned}R_0 &= \rho(K) = \rho(F_0 V_0^{-1}) \\ &= \frac{\alpha \psi \beta}{(\varepsilon + \gamma)(\beta + \gamma)(\gamma + \mu(1-\delta) + \delta)}\end{aligned}$$

4.6 Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Kestabilan titik kesetimbangan diperoleh berdasarkan nilai eigen dari matriks jacobian.

Diperoleh matriks Jacobian dari persamaan (6) sebagai berikut

$$J(E) = \begin{bmatrix} -(d + \varepsilon + \gamma) & 0 & -\alpha S & 0 & 0 \\ d & -(\gamma + \beta) & \alpha S & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -(\gamma + \mu(1-\delta) + \delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -(\gamma + \rho) & 0 \\ \varepsilon & 0 & \mu(1-\delta) & \rho & -(\gamma) \end{bmatrix}$$

Kemudian substitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit (E_0) sehingga diperoleh

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} -(\varepsilon + \gamma) & 0 & -\alpha \frac{\psi}{(\varepsilon + \gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & -(\gamma + \beta) & \alpha \frac{\psi}{(\varepsilon + \gamma)} & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -(\gamma + \mu(1-\delta) + \delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -(\gamma + \rho) & 0 \\ \varepsilon & 0 & \mu(1-\delta) & \rho & -(\gamma) \end{bmatrix}$$

misalkan:

$$d = \varepsilon + \gamma$$

$$k = \gamma + \beta$$

$$m = \gamma + \mu(1-\delta) + \delta$$

$$n = \gamma + \rho$$

λ^0	M_3	0	0
-------------	-------	---	---

Selanjutnya menentukan nilai eigen matriks $J(E_0)$ yaitu $|\lambda I - J(E_0)| = 0$ diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda &= -d \\ \lambda &= -\gamma \\ \lambda &= -n \end{aligned}$$

maka untuk mencari akar λ lainnya menggunakan metode Routh-Hurwitz seperti di bawah ini:

$$\lambda^2 + \lambda(k+m) + km - \frac{\psi\alpha\beta}{(\varepsilon+\gamma)} = 0$$

Tabel 2. Tabel Routh Hurwitz titik kesetimbangan bebas penyakit

λ^2	1	$km - \frac{\psi\alpha\beta}{(\varepsilon+\gamma)}$	0
λ^1	$(k+m)$	0	0
λ^0	$km - \frac{\psi\alpha\beta}{(\varepsilon+\gamma)}$	0	0

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz syarat perlu untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama tabel Routh-Hurwitz bertanda positif. Untuk mendapatkan kolom pertama tabel Routh-Hurwitz semua bertanda positif syaratnya adalah $(k+m) > 0$ dan $km - \frac{\psi\alpha\beta}{(\varepsilon+\gamma)} > 0$. Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit stabil dengan $R_0 < 1$.

4.7 Kestabilan titik Kesetimbangan Endemik

Diperoleh matriks Jacobian dari persamaan (7) dan mensubstitusikan titik kesetimbangan endemik ke persamaan $J(E)$ diatas sehingga diperoleh

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} -(aI^* + \varepsilon + \gamma) & 0 & -\alpha S^* & 0 & 0 \\ aI^* & -(\gamma + \beta) & \alpha S^* & 0 & 0 \\ 0 & \beta & -(\gamma + \mu(1-\delta) + \delta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta & -(\gamma + \rho) & 0 \\ \varepsilon & 0 & \mu(1-\delta) & \rho & -(\gamma) \end{bmatrix}$$

Selanjutnya menentukan nilai eigen matriks $J(E_1)$, yaitu $|\lambda I - J(E_1)| = 0$

diperoleh

$$\begin{aligned} \lambda &= -\gamma & \lambda &= -n \\ \lambda^3 + \lambda^2(m + aI^* + d + k) + \lambda(dk + m(aI^* + d + k)) - \lambda\beta\alpha S^* + dkm + \beta\alpha S^*(aI^* + d) + aI^*\beta\alpha S^* &= 0 \end{aligned}$$

Untuk mencari akar persamaan diatas kita menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz sebagai berikut. misal :

$$\begin{aligned} M_1 &= m + aI^* + d + k \\ M_2 &= dk + m(aI^* + d + k) - \beta\alpha S^* \\ M_3 &= dkm + \beta\alpha S^*(aI^* + d) + aI^*\beta\alpha S^* \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh persamaan berikut.

$$\lambda^3 + M_1\lambda^2 + M_2\lambda + M_3 = 0$$

Tabel 3. Tabel Routh Hurwitz titik kesetimbangan endemik

λ^3	1	M_2	0
λ^2	M_1	M_3	0
λ^1	$\frac{M_1M_2 - M_3}{M_1}$	0	0

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz syarat perlu untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama tabel Routh-Hurwitz bertanda positif. Untuk mendapatkan kolom pertama tabel Routh-Hurwitz semua bertanda positif syaratnya adalah $M_1 > 0$, $\frac{M_1M_2 - M_3}{M_1} > 0$, dan $M_3 > 0$.

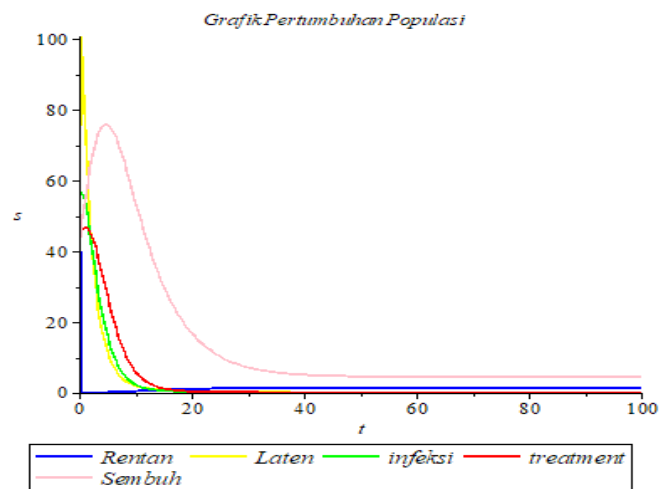
Dapat kita lihat bahwa persamaan-persamaan tersebut akan stabil ketika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik stabil dengan syarat yang memenuhi persamaan tersebut.

4.8 Simulasi Numerik

Selanjutnya dilakukan interpretasi model kedalam bentuk simulasi ini menggunakan software Maple 18. Pada bagian simulasi ini, diamati dinamika populasi dalam dua kondisi, yaitu $R_0 < 1$ dan $R_0 > 1$. Nilai parameter dan variabel yang diperoleh dari beberapa asumsi dan penelitian [2,1,12].

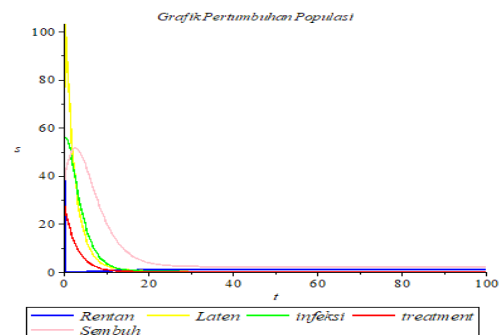
4.9 Simulasi Kasus $R_0 < 1$

Interpretasi model matematika SEITR dapat dilihat plot perubahan masing-masing subpopulasi S, E, I, T , dan R .



Gambar 2. Proporsi subpopulasi S, E, I , dan R untuk $R_0 < 1$

Interpretasi model untuk $\delta = 0$ melihat efektivitas nilai $T = 0$ jika $R_0 < 1$ dapat dilihat dari plot perubahan masing-masing subpopulasi S, E, I, T dan R sebagai berikut.



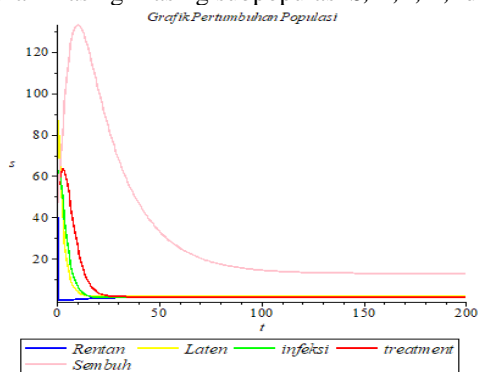
Gambar 3. Proporsi subpopulasi S, E, I, T dan R untuk $T = 0$

Pada gambar 2 dan gambar 3 terlihat bahwa laju pertumbuhan subpopulasi *eusceptible* (garis biru) terlihat bahwa populasi ini mengalami penurunan dan seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju titik 1,23. Sedangkan *exposed*, *infected* dan *treatment* mengalami penurunan menuju titik 0. Kemudian pada subpopulasi *recovered* (garis berwarna merah muda) awalnya mengalami peningkatan karena adanya penambahan individu rentan yang di vaksin dan individu yang sembuh kemudian mengalami penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami dan seiring berjalannya waktu mengalami penurunan menuju titik 4,10. Jadi, pada kedua gambar tersebut diperloeh bahwa individu yang di *treatment* berpengaruh pada jumlah individu yang sembuh, dimana pada gambar 4.2 laju pertumbuhan subpopulasi *recovered* lebih meningkat dari pada gambar 3 oleh karena itu, individu yang di *treatment* lebih cepat penyembuhannya daripada individu yang terinfeksi tidak di *treatment*. Hasil analisis tersebut sesuai dengan analisis kestabilan titik kesetimbangan yang telah diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit cacar

air akan stabil pada titik $\left(\frac{\psi}{(\varepsilon + \gamma)}, 0, 0, 0, \frac{\varepsilon\psi}{\gamma(\varepsilon + \gamma)}\right)$ yaitu titik $(1.23, 0, 0, 0, 4.10)$. Oleh karena itu berdasarkan gambar 3 penyakit cacar air tidak akan bersifat endemik dengan $R_0 < 1$ yaitu 0,58.

4.10 Simulasi Kasus $R_0 > 1$

Interpretasi model matematika SEITR dapat dilihat plot perubahan masing-masing subpopulasi S, E, I, T , dan R .



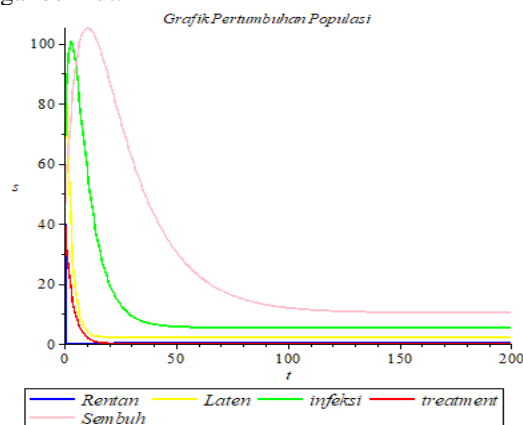
Gambar 4. proporsi subpopulasi S, E, I, T dan R untuk $R_0 > 1$

Pada gambar 4 terlihat bahwa laju pertumbuhan subpopulasi *susceptible* (garis biru) populasi ini awalnya mengalami peningkatan karena adanya laju kelahiran kemudian pada waktu tertentu mengalami penurunan karena adanya laju interaksi individu rentan dengan individu terinfeksi, laju kematian alami dan laju individu yang divaksin seiring berjalannya waktu subpopulasinya menuju titik 1,03. Pada subpopulasi *exposed* (garis kuning) mengalami peningkatan karena adanya kontak individu rentan dengan individu terinfeksi kemudian pada waktu tertentu mengalami penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami dan seiring berjalannya waktu menuju titik 1,52. Pada subpopulasi *infected* (garis hijau) mengalami penurunan karena adanya

individu yang akan di *treatment* dan kematian secara alami dan seiring berjalannya waktu menuju titik 1,09. Pada subpopulasi *treatment* (garis merah) terlihat bahwa populasi ini mengalami peningkatan karena individu yang terinfeksi yang melakukan pengobatan dan perawatan agar cepat sembuh kemudian pada waktu tertentu mengalami penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami dan seiring berjalannya waktu mendekati titik 3,24. Pada subpopulasi *recovered* (garis merah muda) mengalami peningkatan karena adanya individu yang sembuh kemudian mengalami penurunan karena adanya individu yang mengalami kematian secara alami dan seiring berjalannya waktu mendekati titik 12,86. Hal ini sesuai dengan hasil analisis titik kesetimbangan yang telah diperoleh bahwa titik kesetimbangan endemik penyakit cacar air akan stabil yaitu titik $(1.03, 1.52, 1.09, 3.24, 12.86)$ dengan syarat $\frac{M_1 M_2 - M_3}{M_1} > 0$. Oleh karena

itu, berdasarkan gambar 3 penyakit cacar air akan bersifat endemik dengan $R_0 > 1$ yaitu 2,80.

Interpretasi model untuk $\delta = 0$ melihat efektivitas nilai $T = 0$ jika $R_0 > 1$ dapat dilihat dari plot perubahan masing-masing subpopulasi S, E, I, T dan R sebagai berikut



Gambar 5. proporsi subpopulasi S, E, I , dan R untuk $T = 0$

Pada gambar 5 terlihat bahwa perbedaan pada kedua gambar tersebut terletak pada subpopulasi terinfeksi dimana pada gambar 4 mengalami sedikit peningkatan karena adanya individu di *treatment* sedangkan pada gambar 5 mengalami peningkatan yang signifikan karena tidak ada individu yang di *treatment* kemudian menurun seiring berjalannya waktu.

V. KESIMPULAN

Hasil yang diperoleh dari model SEITR terdapat dua titik kesetimbangan yaitu bebas penyakit dan endemik. Analisis model dilakukan dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz untuk mengidentifikasi nilai eigen. Berdasarkan hasil analisis kestabilan diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik stabil jika syarat hubungan parameter-parameternya terpenuhi. Akhir penelitian, pada simulasi

yang telah dilakukan diperoleh bahwa penyakit akan hilang ketika $R_0 < 1$ yaitu 0,58 dan penyakit akan mewabah ketika $R_0 > 1$ yaitu 2,80.

Pada penelitian ini diperoleh bahwa pemberian vaksin untuk mencegah adanya penyebaran penyakit dan adanya pengaruh *treatment* dapat mempercepat penggunaan dalam rangka mengurangi jumlah individu yang terinfeksi dapat dilihat pada gambar 4 dan gambar 5.

REFERENSI

- [1] Wardiana, Nisfadkk. 2016. The Analysis of SEIR Epidemic Models Stability Onsmallpox (Varicella/Chickenpox) with Immune System. *Jurnal*. Kendari: Universitas Halu Oleo.
- [2] Qurrota, dkk. 2015. An Endemic Model of Varicella with Vaccination. *Jambora Journal Biomath, Vol 1, No.2, pp.57-64*.
- [3] Sinaga, Damaria. 2014. Cacar Air. Departemen Biomedik Dasar.
- [4] Boyce, W. E. Dan R. C. Dprima. 2009. *Elementary Differential Equation and Buondary Value Problem. Ninth Edition*. John Wiley and Sons, Inc. USA.
- [5] Finizio, N. Dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equations with Difference Equation, Fourier, Series, and Partial Differential Equations*. Wadsworth Publishing Company. Belmont, California.
- [6] Ross, L. Shepley. 1987. *Differential Equations 3th*. New York: University of New Hapshire.
- [7] Perko, L., 2008. *Differential Equation and Dynamical System*. Spinger-Verlag Berlin Heidelberg:New York.
- [8] Kocak, H. & Hale, J.K. 1991. *Dynamical and Bifurcation*. New York: Springer-Verlag.
- [9] Anton, H & Rorres, C. 2014. *Elementary Linear Algebra 11th Edition*. USA: John Wiley & Sons, Inc.
- [10] Olsder, G.J. & Woude, J.W. Van Der. 1998. *Mathematical System Theory Second Edition*. Faculty On Infomation Technologhy and System Deft Unoversity of Technologi.
- [11] F. Dewi. 2017. Analsis Dinamik Model Penyebaran Virus Influenza Dengan Resistensi Penyakit. *Skripsi*. Malang: Universitas Brawijaya.