JOMTA
Journal of Mathematics: Theory and Applications
Vol.3, No.1, 2021, P-ISSN 2685-9653 e-ISSN 2722-2705

Analisis Model Matematika Penyebaran Penyakit Ispa

Nurfadilah[1], Fardinah[2], Hikmah[3]
[1]Program Studi Matematika, [2,3] Program Studi Statistika, Universitas Sulawesi Barat, Indonesia
e-mail: [1]nurfadila4145@gmail.com , [2]fardinah@unsulbar.ac.id., [3]hikmah@unsulbar.ac.id.

Abstrak. Infeksi Saluran Pernapasan Akut (ISPA) merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri dan lingkungan yang tidak sehat. Jumlah penderita penyakit ini cenderung meningkat dan meluas. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengkontruksi model matematika epidemi SEHAR (*Suspectible-Exposed-Infected-Asthma-Recovered*), menganalisis sifat kestabilan titik kesetimbangan dan simulasi model. Hasil yang diperoleh berupa model matematika SEHAR penyebaran peenyakit ISPA yang menghasilkan titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik dari model tersebut. Metode yang digunakan yaitu analisis kestabilan model yang dilakukan dengan menggunakan Kriteria Routh-Hurwitz untuk mengidentifikasi karakteristik nilai eigen. Hasil analisis kestabilan diperoleh bahwa tiktik kesetimbangan bebas penyakit *Eo* dan titik kesetimbangan endemik E_1 stabil jika syaratnya terpenuhi. Pada akhir penelitian, diberikan simulasi model dengan menggunakan aplikasi Maple.
Kata Kunci : infeksi saluran pernapasan akut (ISPA), model matematika SEHAR, kriteria Routh-Hurwitz

Abstract. *Acute Respiratory Infection (ARI) is an infectious disease caused by bacteria and an unhealthy environment. The number of sufferers of this disease tends to increase and expand. The purpose of this study was to construct a mathematical model of the SEHAR epidemic (Suspectible-Exposed-Infected-Asthma-Recovered), analyze the stability of the equilibrium point and simulate the model. The results obtained are the SEHAR mathematical model for the spread of ARI disease which produces a disease-free equilibrium point and an endemic equilibrium point from the model. The method used is the stability analysis of the model using the Routh-Hurwitz Criteria to identify the characteristics of the eigenvalues. From the results of the stability analysis, it is found that the disease-free equilibrium point Eo and the endemic equilibrium point E1 are stable if the conditions for the relationship between parameters are met. At the end of the study, a simulation model was given using the Maple application*.
Keywords: a*cute respiratory infection (ARI), SEHAR mathematical model, Routh-Hurwitz*

I. PENDAHULUAN

Model matematika adalah model yang mempresentasikan suatu permasalahan didunia nyata ke dalam persamaan matematika. Pemodelan matematika juga banyak diaplikasikan pada berbagai kasus dalam kehidupan sehari-hari, salah satunya dalam bidang epidemologi juga memiliki peran yang sangat dalam mempelajari dinamika suatu wabah penyakit, mulai dari kajian pencarian sumber, dan penyebaran. Bidang kajian ini biasa disebut dengan matematika epidemiologi. Seiring dengan perkembangan zaman dan ilmu pengetahuan, maka suatu peristiwa atau suatu permasalahan dapat dianalisis dan dimodelkan khususnya dalam bentuk matematika.

Penyakit Infeksi Saluran Pernapan Akut (ISPA) di klasifikasikan menjadi dua bagian yaitu ISPA bagian atas dan ISPA bagian bawah. ISPA bagian atas akan menyerang struktur-struktur saluran nafas disebelah atas laring. ISPA bagian bawah dan merusak struktur saluran pernafasan mulai laring sampai dengan alveoli atau paru-paru. Hal ini yang menyebabkan penyakit asma dan menjadi akut atau kronik bahkan dapat menyebabkan kematian. Penularan virus atau bakteri penyebab ISPA dapat terjadi melalui kontak dengan percikan air liur akan menyebar melalui udara, masuk ke hidung atau mulut orang lain. Selain kontak langsung dengan percikan liur penderita, virus juga dapat menyebar melalui sentuhan dengan benda yang terkontaminasi, atau berjabat tangan dengan penderita.

Asma juga merupakan penyakit yang menjadi masalah kesehatan masyarakat dihampir semua Negara di dunia. Faktor lingkungan yang berperan sebagai faktor pencetus serangan/eksaserbasi dan menyebabkan gejala-gejala asma menetap yaitu: alergen di dalam dan di luar ruangan, polusi udara di dalam dan di luar ruangan, infeksi saluran pernapasan, *exercise* dan hiperventilasi . Terdapat 4.487 kematian akibat penyakit asma atau sekitar 1,6 per 100.000 populasi, sedangkan didapatkan juga sebanyak 223 kematian anak usia 0-17 tahun atau 0,3 per 100.000 populasi [1].

Pada penelitian ini, akan diperkenalkan model matematika yang baru dengan beberapa pertimbangan epidemiologi yang tidak digunakan pada model-model sebelumnya, yaitu adanya subpopulasi individu yang terinfeksi penyakit asma. Hal ini penting dipertimbangkan karena diduga banyak kasus yang terinfeksi ISPA bisa menimbulkan penyakit baru yaitu asma. Model yang akan diteliti oleh penulis yaitu pemodelan matematika SEHAR pada penyebaran penyakit ISPA. Pada model ini populasi dibagi menjadi lima subpopulasi yaitu, *Susceptible* individu rentan, *Exposed* individu terpapar, *Infected ISPA* individu terinfeksi ISPA, *Infected asthma* individu terinfeksi asma, *Recovered* individu sembuh.

Berdasarkan latar belakang di atas, dapat dirumuskan beberapa masalah yang akan dibahas sebagai berikut,

1. Bagaimana mengkontruksi model matematika penyakit ISPA dengan model SEHAR?

2. Bagaimana analisis model SEHAR dengan panyakit ISPA?
3. Bagaimana simulasi penyebaran penyakit ISPA?

Tujuan penelitian ini adalah sebagai berikut.

1. Mendapatkan model metematrika dari penyakit ISPA dengan model SEHAR
2. Menganalisa penyakit ISPA dengan model SEHAR
3. Simulasi penyebaran penyakit ISPA dengan menggunakan *Maple*

II. LANDASAN TEORI

Pemodelan matematika adalah penyusunan suatu deskripsi dari beberapa perilaku dunia nyata (fenomena-fenomena alam) dalam bagaian matematika yang disebut dunia matematika. Ada dua tipe model matematika, yaitu model bertipe determinitik dan model bertipe empirik. Model deterministik merupakan suatu model matematika yang dibagun dengan berlandasan hukun-hukun atau sifat-sifat yang berlaku pada sistem. Sedangan, model empirik cenderung kepada fakta yang diberikan oleh sistem atau data [2].

Dalam membangun sebuah model diperlukan beberapa tahapan agar dihasilkan model yang variable [3]. Secara umum tahapan-tahapan tersebut adalah sebagai berikut:

1. Identifikasi masalah
   Identifikasi masalah dilakukan untuk memahami masalah yang akan dirumuskan.
2. Membangun asumsi-asumsi
   Hal ini diperlukan karena model adalah penyederhanaan realitas yang kompleks. Kompleksitas permasalahan dapat disederhanakan dengan mengasumsikan hubungan sederhana antara variabel. Asumsi disini dibagi dalam dua kategori utama yaitu:
   a. Klasifikasi variabel
      Hal yang mempengaruhi tingkah laku pengamatan pada langkah 1 diidentifikasikan sebagai variabel, baik berupa variabel bebas maupun variabel terikat. Dalam model akan dijelaskan variabel terikat dan variabel bebas. Sehingga dengan adanya klasifikasi variabel dapat dipilih variabel mana yang diabaikan.
   b. Menentukan interelasi antara variabel yang terseleksi untuk dipelajari sebelum membuat hipotesa tentang relasi antar variabel, secara umum dilihat beberapa penyederhanaan tambahan. Persoalan yang cukupkompleks mengakibatkan relasi anatara variabel tidak dapat dilihat secara permulaan. Dalam kasus ini biasanya dibuat sebuah submodel.
3. Membuat konstruksi model
   Membuat konstruksi model dapat dilakukan baik melalui hubungan fungsional dengan cara membuat diagram alur, persamaan-persamaan matematika maupun dengan bantuan sofware ataupun secara analitis.
4. Menganalisis model
   Tahap ini dilakukan untuk mencari solusi yang sesuai untuk menjawab pertanyaan yang dibangun pada tahap identifikasi. Di dalam pemodelan, analisis dapat dilakukan dengan dua cara, yaitu dengan melakukan optimasi dan simulasi. Optimasi dirancang untuk mencari solusi apa yang seharusnya terjadi dan simulasi dirancang untuk mencari solusi apa yang akan terjadi.
5. Interpretasi
   Interpretasi penting dilakukan untuk mengetahui apakah hasil model tersebut rasional atau tidak.
6. Validasi
   Sebelum menggunakan model untuk menyimpulkan kejadian dunia nyata, model tersebut harus diuji keabsahannya. Model yang valid tidak hanya mengikuti kaidah-kaidah teoritis yang sah tetapi juga memberikan interpretasi atas hasil yang diperoleh mendekati kesesuaian. Jika sebagian besar standar verifikasi tersebut dapat dilalui, model dapat diimplementasikan, sebaiknya jika tidak, maka konstruksi model harus dirancang ulang.
7. Implementasi
   Jika hasil validasi memenuhi syarat dan rasional maka hasilnya dapat diterima, baru kemudian dapat dilakukan implementasi dari model yang diperoleh.

2.1 Persaman Diferensial

Persamaan diferensial diklarifikasikan menjadi dua berdasarkan jumlah variabel bebas yang terlibat, yaitu persamaan diferensial biasa dan diferensial parsial.
Persamaan diferensial memiliki definisi sebagai berikut:

Definisi 2.1

Persamaan diferensial adalah persamaan yang melibatkan satu atau lebih turunan dari fungsi yang tidak diketahui. Berdasarkan turunan variabel bebas yang dilibatkan dalam persamaan, persamaan diferensial terdiri atas dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial [4].

Definisi 2.2

Persamaan diferensial biasa adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas. Sedangkan persamaan diferensial parsial adalah suatu persamaan diferensial yang melibatkan turunan dari satu atau lebih variabel tal bebas terhadap dau atau lebih variabel babes [5]
Persamaan diferensial biasa mempuyai bentuk sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Jika hanya satu peubah bebas, maka disebut persamaan diferensial biasa.

2.2. Sistem Persamaan Diferensial

Klasifikasi yang lain dari persamaaan yaitu terdapat satu fungsi dan terdapat dua atau lebih yang tidak diketahui [5].

Definisi 2.3

Sistem persamaan diferensial adalah suatu sistem yang memuat *n* persamaan diferensial, dengan *n* fungsi yang tidak diketahui, dimana *n* merupakan bilangan bulat positif lebih besar sama dengan dua atau lebih. Antar persamaan diferensial yang satu dengan yang lain saling terkait dan konsisten [6]

Jika $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ untuk menyatakan turunan pertama x terhadap t, maka

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$
$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

Sistem persamaan diferensial merupakan persamaan diferensial yang mempunyai lebih atau satu persamaan yang harus konsisten serta trivial. Sistem persamaan diferensial adalah gabungan dari *n* buah persamaan diferensial dengan *n* buah fungsi tak diketahui.Dalam hal ini, *n* merupakan bilangan bulat positif ≥ 2. Sistem persamaan diferensial juga dibedakan menjadi sistem persamaan diferensial liner dan sistem persamaan diferensial tak linear [7].

2.3 Sistem Persamaan Diferensial Linear

Sistem persamaan diferensial linear adalah sistem persamaan yang terdiri dari n buah persamaan diferensial linear *n* buah fungsi tak diketahui berbantuk:

$$\dot{x}_1 = x_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$
$$\dot{x}_2 = x_{12}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

Sistem persamaan diferensial linier dengan dua fungsi yang tak diketahui berbentuk:

$$\dot{x}_1 = a(t)x_1 + b(t)x_2 + f_1(t)$$
$$\dot{x}_2 = c(t)x_1 + d(t)x_2 + f_2(t)$$

Dimana fungsi f_1 dan f_2 merupakan fungsi t yang kontinu pada suatu selang I, sedangkan x_1 dan x_2 adalah fungsi *t* yang tak diketahui [8]

2.4 Sistem Persamaan Diferensial Non linear

Adapun definisi dari persamaan diferensial non linear yaitu sebagai berikut:

Definisi 2.4

Persamaan diferensial non linear adalah persamaan diferensial biasa yang tak linear [5]

Persamaan diferensial dikatakan non linear jika persamaan diferensial tersebut memenuhi paling sedikit satu dari kriteria berikut:

a. Memuat variabel tak bebas dari turunan-turunannya berpangkat selain satu.

b. Terdapat perkalian dari variabel tak bebas dan atau turunan-turunannya.

c. Terdapat fungsi transcendental dari variabel tak bebas dan turunan-turunannya.

2.5 Pelinearan

Analisis kestabilan sistem persamaan diferensial tak linear dilakukan melalui pelinearan. Digunakan untuk mengetahui kestabilan suatu sistem persamaan diferensial. Untuk mencari hasil pelinearan dari persamaan diferensial tak linear digunakan matriks Jacobi.

Definisi 2.5

Diberikan fungsi $f = (f_1, \ldots, f_n)$ pada sistem $\bar{x} = f(x)$ dengan $f_1 \in C^1(E) = 1, 2, \ldots, n$ dimana $E \subseteq R^n$ adalah himpunan terbuka dan $f_1 \in C^1(E)$ dengan C^1 merupakan notasi untuk himpunan semua fungsi yang mempunyai turunan pertama yang kontinu di *C* [9]

$$Jf(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\bar{x}) & \cdots \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{pmatrix}$$

dimana matriks Jacobian dari *f* di titik $\bar{x} \in R^n$.

2.6 Analisis kestabilan Titik Kesetimbangan

Definisi 2.6

Titik $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ disebut titik kessetimbangan (titik equilibrium) jika $f(\bar{x}) = 0$ [2]

Definisi 2.7

Titik ekuilibrium $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ persamaan (2.8) dikatakan

(1) Stabil lokal jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ berlaku $\|x(t) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t > t_0$.

(2) Stabil asimtotik lokal jika titk kesetimbangan $\bar{x} \in \mathbf{R}^n$ stabil dan terdapat $\delta_0 > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0 - \bar{x}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t \to \infty} x(t) = \bar{x}$.

(3) Tidak stabil jika ekuilibrium $\bar{x} \in R^n$ tidak memenuhi [10]

2.7 Nilai Eigen

Nilai eigen digunakan untuk mengetahui kestabilan dari suatu sistem persamaan diferensial. Berikut merupankan definisi nilai eigen.

Definisi 2.8

Jika A merupakan matriks yang berukuran *n* x *n*, maka vector taknol x di dalam R^n dinamaakan vector eigen dari *A* jika memenuhi persamaan

$$Ax = \lambda x$$

dengan λ adalah suatu skalar $\lambda \epsilon R$. Skalar λ dinamakan nilai eigen *(eigenvalue)* dari A dan x dikatakan vektor eigen *(eigenvector)* yang bersesuaian dengan λ [11].

2.8 Bilangan Reproduksi Dasar

Bilangan reproduksi dasar merupakan jumlah rata-rata banyaknya individu yang terinfeksi akibat tertular oleh suatu individu oleh salah satu individu terinfeeksi sebelumnya. Oleh karena itu, bilangan reproduksi dasar (R_0) ini bertujuan untuk menentukan ada atau tidaknya penyakit dalam suatu populasi. Jika $R_0 < 1$ maka penyakit hanya menginfeksi kurang dari satu individu rentan hingga kemungkinan penyakit akan hilang dari populasi. Jika $R_0 > 1$ maka individu yang terinfeksi akan menginfeksi lebih dari satu individu yang rentan. Dan jika $R_0 = 1$ maka individu yang terinfeksi akan menularkan tepat kepada satu individu.

Definisi 2.9

Bilangan reproduksi dasar didefinisikan sebagai jumlah rata-rata kasus sekunder yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi selama masa terinfeksinya dalam keseluruhan populasi rentan [12].

Metode next generatio matrix adalah suatu metode yang digunakan untuk memperoleh nilai pendekatan dan bilangan reprodukasi dasar (R_0) pada model kompartemen penyebaran penyakit. Pada metode ini populasi model kompartemen penyebaran penyakit terdiri dari dua kelompok, yaitu kelompok kompartemen penyakit dan kelompok kompartemen non-penyakit.

2.9 Kriteria Routh Hurwitz

Kriteria *Routh-Hurwitz* dipakai untuk mengecek kestabilan secara langsung dengan mempertimbangkan nilai koefisien tanpa menghitung akar-akar dari persamaan [13]. Koefisien-koefisien persamaan karakteristik dapat disusun ke dalam sebuah tabel *Routh-Hurwitz* berikut ini

Variabel	koefisien			
λ^n	a_0	a_2	$\cdots$	a_{n-1}
λ^{n-1}	a_1	a_3	$\cdots$	a_n
λ^{n-2}	b_1	b_1		b_n
λ^{n-3}	c_1	c_1		c_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
λ^2	e_1	e_2		
λ^1	f_1			
λ^0	g_1			

dimana koefisien b_1, b_2, c_1, c_2 didefinisikan sebagai

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} \quad c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$$

$$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$b_n = \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1} \qquad c_n = \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1}$$

2.10Infeksi Saluran Pernafasan Akut (ISPA)

Istilah ISPA diadaptasi dari bahasa Inggris yaitu *Acute Respiratory Infection* (ARI). Di dalam Depkes RI (2006) dijelaskan bahwa ISPA mengandung tiga unsur, yaitu infeksi, saluran pernafasan, dan akut. Pengertian atau batasan masing-masing unsur adalah sebagai berikut:

1. Infeksi adalah masuknya kuman atau mikroorganisme ke dalam tubuh manusia dan berkembang biak sehingga menimbulkan gejala penyakit.
2. Saluran pernapasan adalah organ yang mulai dari hidung hingga alveoli beserta organ adneksanya seperti sinus-sinus, rongga telinga tengah dan pleura. Dengan demikian ISPA secara otomatis mencakup saluran pernafasan bagian atas, saluran pernafasan bagian bawah (termasuk jaringan paru-paru) dan organ adneksa saluran pernafasan. Dengan batasan ini maka jaringan paru-paru termasuk dalam saluran pernafasan *(respiratory tract).*

Infeksi akut adalah infeksi yang berlangsung sampai dengan 14 hari. Batas 14 hari ini diambil untuk menunjukkan proses akut meskipun untuk beberapa penyakit yang dapat digolongkan ISPA proses ini dapat berlangsung lebih dari 14 hari.

III. METODE

3.1 Jenis Penelitian

Jenis penelitian ini adalah penelitian kepustakaan atau studi literatur. Referensi yang digunakan dalam penelitian ini beruapa buku-buku, jurnal dan literatur lain yang berkaitan dengan penyebaran penyakit ISPA.

3.2 Prosedur Penelitian

Pada penelitian ini, metode atau langkah-langkah dalam menganalisis model matematika SEHAR pada penyakit ISPA dan asma adalah sebagai berikut:

1. Mengentifikasi Masalah
   Identifikasi masalah yaitu membaca dan memahami literatur yang berkaitan dengan model matematika SEHAR pada ISPA, asma sehingga menemukan sub populasi yang akan digunakan dalam model.
2. Membuat Asumsi
   Asumsi diperlukan dalam membuat model. Asumsi di sini mencerminkan bagaimana proses berpikir sehingga model dapat berjalan.
3. Membentuk Model
   Membentuk model dalam bentuk sistem persamaan diferensial.
4. Menganalisa Model
   Menentukan titik kesetimbangan model
5. Mensimulasikan Model
   Mensimulasikan model dengan menggunakan program *Maple.*
6. Mengambil Kesimpulan

Mengambil kesimpulan dan menginterpretasikan model.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

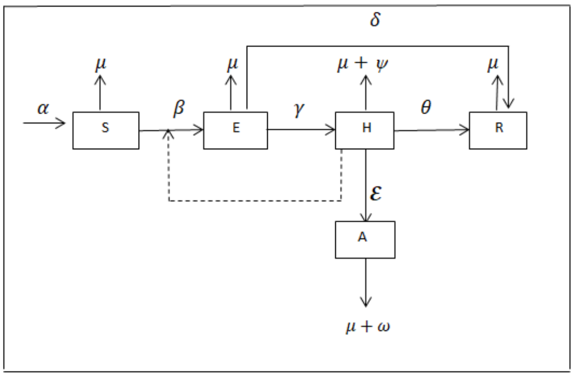
Model matematika pada penyebaran ISPA yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah model matematika SEHAR. Pada model ini populasi dibagi menjadi lima kompartemen atau subpopulasi. Subpopulasi yang rentan akan penyakit ISPA dimasukan dalam kelas *susceptible* (populasi rentan). Subpopulasi yang mengalami gejala penyakit ISPA dimasukan dalam kelas *Exposed* (terpapar). Subpopulasi yang terinfeksi dimasukan dalam kelas *Infected* (terinfeksi ISPA). Subpopulasi yang terinfeksi asma dimasukan dalam kelas *Infected asthma* (terinfeksi asma) dan subpopulasi yang sembuh dari penyakit ISPA dimasukan dalam kelas *Recovered* (sembuh).

4.1 Asumsi Model Matematika

Asumsi model matematika SEHAR sebagai berikut:

1. Dibagi menjadi 5 subpopulasi yaitu, subpopulasi manusia rentan (S), Subpopulasi subpopulasi manusia Terpapar (E), subpopulasi manusia terinfeksi ISPA (H), subpopulasi manusia terinfeksi asma (A), dan subpopulasi sembuh (R).
2. Individu rentan bisa terpapar jika berinteraksi secara langsung dengan yang terinfeksi ISPA.
3. Individu yang terpapar ISPA memiliki peluang umtuk sembuh dan terinfeksi.
4. Semua individu rentan terhadap penyakit ISPA.
5. Populasi diasumsikan tertutup.
6. Faktor kelahiran diasumsikan masuk kedalam subpopulasi rentan.
7. Subpopulasi S,E dan R mengalami kematian alami sedangkan pada subpopulasi H dan A terdapat kematian karena penyakit ISPA dan kematian alami.
8. Individu yang terinfeksi penyakit ISPA dapat sembuh jika dirawat intensif.
9. Individu yang terinfeksi ISPA jika tidak dirawat intensif dapat terinfeksi asma.
10. Individu yang terinfeksi asma tidak dapat sembuh.

4.2 Diagram Model Matematika



Gambar 1. diagram model SEITR *Varicella*

Keterangan:

S : Jumlah individu rentan terhadap penyakit
E : Jumlah individu terpapar
H : Jumlah individu yang terinfeksi ISPA
A : Jumlah individu yang terinfeksi asma
R : Jumlah individu yang sembuh
α : Kelahiran konstan
μ : Laju kematian alami
β : Laju individu rentan menjadi terpapar ISPA
γ : Laju individu terpapar menjadi terinfeksi
δ : Laju individu terpapar menjadi sembuh
ψ : Laju kematian karna penyaakit ISPA
ε : Laju individu terinfeksi ISPA menjadi asma
ω : Laju kematian karena penyakit asma
θ : Laju individu terindeksi ISPA menjadi sembuh

Berdasarkan diagram dan uraian di atas, maka penyebaran penyakit ISPA dapat dimodelkan dalam bentuk sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\frac{dS}{dt} &= \alpha - \beta SH - \mu s \\
\frac{dE}{dt} &= \beta SH - (\mu + \gamma + \delta)E \\
\frac{dH}{dt} &= \gamma E - (\mu + \psi + \theta + \varepsilon)H \\
\frac{dA}{dt} &= \varepsilon H - (\mu + \omega)A \\
\frac{dR}{dt} &= \theta H + \delta E - \mu R
\end{aligned} \tag{1}$$

4.3 Titik Kesetimbangan dari Sistem Persamaan

Titik kesetimbangan atau titik tetap dari sistem persamaan diproleh jika $\frac{dS}{dt}=0, \frac{dE}{dt}=0, \frac{dH}{dt}=0, \frac{dA}{dt}=0, \frac{dR}{dt}=0$. Titiik kesetimbangan dari persamaan terbagi menjadi dua yaitu titik kesetimbangan bebas penyakit dan titik kesetimbangan endemik. Berdasarkan sistem persamaan tersebut diperoleh bahwa titik kesetimbangan bebas penyakit pada peeenyakit ISPA adalah $E_0(S,E,H,A,R) = \left(\frac{\alpha}{\mu}, 0, 0, 0, 0\right)$ .jadi peroleh titik kesetimbangaa endemik pada penyakit ISPA adalah $E_1(S,E,H,A,R) =$

$$\left[\frac{(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)}{\beta\gamma}, \frac{(-\mu(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)+\gamma\beta\alpha)}{\gamma\beta(\mu+\gamma+\delta)}, \frac{-\mu(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)+\gamma\beta\alpha}{\beta(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)}, \frac{\varepsilon(-\mu(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)+\gamma\beta\alpha)}{\beta(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)(\mu+\omega)}, \frac{-\mu(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)+\gamma\beta\alpha+\delta(\mu+\gamma+\delta)}{\beta\gamma(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)\mu}\right]$$

4.4 Bilangan Reproduksi Dasar

Berdasarkan lima subpopulasi yang ada, terdapat dua subpopulasi yang terinfeksi yaitu E dan H. sehingga persamaannyaa adalah

$$dE = \beta\delta h - (\mu + \gamma + \delta)E$$

$$dH = \gamma E - (\mu + \psi + \theta + \varepsilon)H$$

Ruas kanan dikelompokan menjadi dua yakni suku pertama yang terkait dengan kejadian infeksi baru disimbolkan dengan P dan suku kedua yang terkait dengan transisi disimbolkan R.

$$\begin{pmatrix} dE \\ dH \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta SH \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (\mu+\gamma+\delta)E \\ -\gamma E(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)H \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} \beta SH \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$V = \begin{pmatrix} (\mu+\gamma+\delta)E \\ -\gamma E(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)H \end{pmatrix} \quad (3)$$

kemudian persamaan (2) dan(3) diturunkan terhadap E dan H sehinggan di peroleh:

$$F' = \begin{pmatrix} 0 & \beta S \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$V' = \begin{pmatrix} (\mu+\gamma+\delta) & 0 \\ -\gamma & (\mu+\psi+\theta+\varepsilon) \end{pmatrix}$$

$$F'V'^{-1} = F'\frac{1}{\det V'} adjV'$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{\beta\alpha\gamma}{\mu(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)(\mu+\gamma+\delta)} & \dfrac{\beta\alpha}{\mu(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

kemudian untuk mencari nilai eigen, dapat dilakukan dengan cara mengoprasikan matriks di atas dengan matriks identitas yang telah dikali dengan λ dan diterminankan sehingga

$$|K - \lambda I| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} \dfrac{\beta\alpha\lambda}{\mu(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)(\mu+\gamma+\delta)} & \dfrac{\beta\alpha}{\mu(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\beta\alpha\gamma}{\mu(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)} - \lambda_1 & \dfrac{\beta\alpha}{\mu(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)} \\ 0 & -\lambda_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{\beta\alpha\gamma}{\mu(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)} - \lambda_1 \right)(-\lambda_2) = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{\beta\alpha\gamma}{\mu(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)}$$

atau $-\lambda_2 = 0$

Jadi, bilangan reproduksi dasar dari model SEHAR

$$R_0 = \frac{\beta\alpha\gamma}{\mu(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)}$$

atau $-\lambda_2 = 0$

Jadi, bilangan reproduksi dasar dari model SEHAR

$$R_0 = \frac{\beta\alpha\gamma}{\mu(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)}$$

4.5 Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Kestabilan titk kesetimbangan diperoleh dari nilai eigen dan matriks jacobian.

Diperoleh matriks jacobian dari persamaan (1) sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta H - \mu & 0 & -\beta S & 0 & 0 \\ \beta H & -(\mu+\gamma+\delta) & \beta S & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu+\psi+\theta+\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -(\mu+\omega) & 0 \\ 0 & \delta & \theta & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

kemudian subtitusikan titik kesetimbangan bebas penyakit S dan H sehingga

$$J = \begin{bmatrix} -\mu & 0 & \dfrac{-\beta\alpha}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & -(\mu+\gamma+\delta) & \dfrac{\beta\alpha}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu+\psi+\theta+\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -(\mu+\omega) & 0 \\ 0 & \delta & \theta & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

misalkan

$$A = (\mu+\gamma+\delta)$$

$$B = (\mu+\psi+\theta+\varepsilon)$$

$$C = (\mu+\omega)$$

Mencari nilai eigen matriks jacobian dengan

$$|\lambda I - J(E_1)| = 0$$

Diperoleh

$$\lambda = -\mu$$

karena akar λ lainnya tidak dapat dicari meggunakan metode diatas, maka untuk mencari akar λ lainnya menggunkan metode Routh-Hurwitz seperti dibawah ini:

$$\left(\lambda^3 + \lambda^2(A+B+C) + \lambda\left(AB+BC+AC-\frac{\gamma\beta\alpha}{\mu} \right) + ABC + \frac{\gamma\beta\alpha C}{\mu} \right) = 0$$

misalkan

$$D_1 = A+B+C$$

$$D_2 = AB+BC+AC-\frac{\gamma\beta\alpha}{\mu}$$

$$D_3 = C\left(AB - \frac{\gamma\beta\alpha}{\mu} \right)$$

Berdasarkan nilai-nilai di atas diperoleh tabel Routh-Hurwitz sebagai berikut:

Table 1. Tabel Routh-Hurwitz titik kesetimbangan bebas penyakit

λ^3	1	D_2
λ^2	D_1	D_3
λ^1	$\dfrac{D_1D_2 - D_3}{D_1}$	0
λ^0	D_3	0

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz syarat perlu untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama pada table Routh-Hurwitz bertanda positif. Untuk mendapatkan kolom pertama table Routh-Hurwitz semua bertanda positif syaratnya adalah $D_1 > 0, D_2 > 0$ dan $\frac{D_1D_2 - D_3}{D_1} > 0$.

4.5 *Kestabilan Titik Kesetimbangan Endemik*

Kestabilan titk kesetimbangan diperoleh dari nilai eigen dan matriks jacobian.

Diperoleh matriks jacobian dari persamaan (1) sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} -\beta H - \mu & 0 & -\beta S & 0 & 0 \\ \beta H & -(\mu+\gamma+\delta) & \beta S & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu+\psi+\theta+\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -(\mu+\omega) & 0 \\ 0 & \delta & \theta & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

kemudian subtitusikan titik kesetimbangan endemik E_1 (S, E, H, A,R)

Misalkan:

$$S^* = \frac{(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)}{\beta\gamma}$$

$$S = \frac{\alpha}{\mu R_0}$$

$$H^* = \frac{-\mu(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)+\alpha\beta\gamma}{\beta(\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)}$$

$$H = \frac{\mu(R_0-1)}{\beta}$$

Diperoleh

$$J = \begin{bmatrix} -\beta H^* - \mu & 0 & -\beta S^* & 0 & 0 \\ \beta H^* & -(\mu+\gamma+\delta) & \beta S^* & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -(\mu+\psi+\theta+\varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & -(\mu+\omega) & 0 \\ 0 & \delta & \theta & 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Misalkan:

$$A = (\mu+\gamma+\delta)$$

$$B = (\mu+\psi+\theta+\varepsilon)$$

$$C = (\mu+\omega)$$

mencari nilai eigen matriks jacobian dengan

$$\left|\lambda I - J(E_1)\right| = 0$$

Diperoleh

$$\lambda_5 = -\mu$$

karena akar λ lainnya tidak dapat dicari meggunakan metode diatas, maka untuk mencari akar λ lainnya menggunkan metode Routh-Hurwitz seperti dibawah ini:

$$\lambda^4 + \left((A+B+C)+(\beta H^*-\mu)\right)\lambda^3 +$$
$$\left((AB+AC+BC-\beta\gamma S^*)+(\beta H^*-\mu)(A+B+C)\right)\lambda^2 +$$
$$\left((ABC-\beta\gamma S^*C)(\beta H^*-\mu)(AB+AC+BC-\beta\gamma S^*)+(\beta^2\gamma H^*S^*\lambda)\right)\lambda +$$
$$(\beta H^*-\mu)(ABC-\beta\gamma S^*C)+(\beta^2\gamma CH^*S^*)=0$$

Misalkan

$$M = (A+B+C)+(\beta H^*+\mu)$$

$$N = (AB+AC+BC-\beta\gamma S^*)+(\beta H^*+\mu)(A+B+C)$$

$$G = (ABC-\beta\gamma S^*C)(\beta H^*+\mu)(AB+AC+BC-\beta\gamma S^*)+(\beta^2\gamma H^*S^*\lambda)$$

$$D = (\beta H^*+\mu)(ABC-\beta\gamma S^*C)+(\beta^2\gamma CH^*S^*)$$

Berdasarkan nilai-nilai di atas diperoleh tabel Routh-Hurwitz sebagai berikut:

Table 2. Tabel Routh-Hurwitz titik kesetimbangan endemik

λ^4	1	N	0
λ^3	M	G	0
λ^2	$\frac{M.N-G}{M}$	0	0
λ^1	G	0	0
λ^0	D	0	0

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz syatar perlu untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama table Routh-Hurwitz bertanda positif. Unruk mendapatkan kolom pertama table Routh-Hurwitz semua bertanda positif syaratnya adalah $G > 0, M > 0, \frac{M.N-G}{M} > 0, D > 0$

Untuk $D > 0$

$$(\beta H^*-\mu)(ABC-\beta\gamma S^*C)+(\beta^2\gamma CH^*S^*) > 0$$

$$S = \frac{\alpha}{\mu R_0}$$

$$H = \frac{\mu(R_0-1)}{\beta}$$

Diperoleh

$$(\beta R_0 - \mu)((\mu+\gamma+\delta)(\mu+\psi+\theta+\varepsilon)(\mu+\omega) -$$
$$\beta\gamma R_0(\mu+\omega)) + (\beta^2\gamma R_0(\mu+\omega)R_0) > 0$$

Sehingga D akan positif jika $R_0 > 1$

Dapat kiat lihat bahwa persamaan- persamaan tersebut akan stabil ketika $R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik stabil dengan syarat $G > 0$ dan $\frac{MN-G}{M} > 0$.

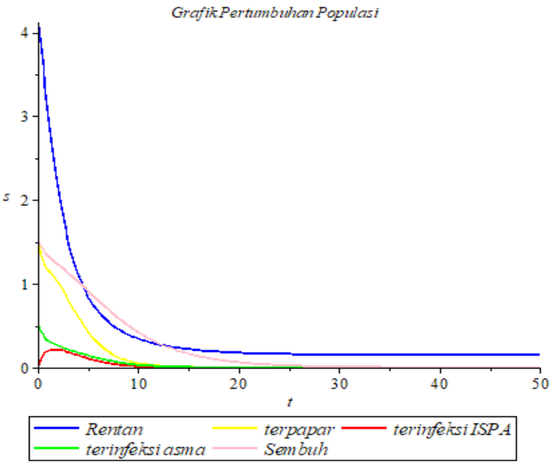
$R_0 > 1$ maka titik kesetimbangan endemik stabil asimtotik.

4.6 *Simulasi Numerik*

Selanjutnya dilakukan interpretasi model kedalam bentuk simulasi ini menggunakan *software maple 18.* Pada bagian simulasi ini, diamati dinamika populasi dalam dua kondisi, yaitu $R_0 > 1$ dan $R_0 > 1$.

4.6.1 Simulasi Model Untuk $R_0 > 1$

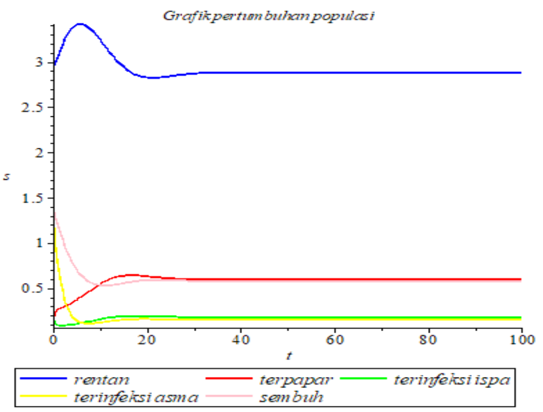
Interpretasi model untuk $R_0 > 1$ dapat dilihat dari plot perubahan masing-masing subpopulasi *S, E, H, A,* dan *R* sebagai berikut:



Gambar 2. Proporsi Subpopulasi *S, E, H, A,* dan *R* untuk $R_0 > 1$

Pada gambar 2 terlihat bahwa laju pertumbunhan subpopulasi *Susceptible* mangalami penurunan hingga menuju ke 0,15 hal ini dikarenakan adanya individu yang rentan menjadi individu yang terpapar dan adanya kematian alami. Pada subpopulasi terpapar *Exposed* menurung dikarenakan individu yang terpapar menjadi individu yang terinfeksi dan adanya sumbuh secara alami dan kematian alami, subpopulasi *Infected ISPA* mengalami penurunan dikarenakan individu yang terinfeksi menjadi individu sembuh dan terinfeksi penyakit asma dan adanya kematian karena penyakit dan kematian alami subpopulasi asma *Infected Asthma* mengalami penurunan dikarenakan mengalami kematian karena penyakit dan kematian alami subpopulasi sembuh *Recoved* mengalami penurunan dikarenakan telah sembuh dari penyakit. Hasil simulasi yang dilakukan sesuai dengan hasil analisis titik kesetimbangan yang dikerjakan sebelumnya. Dapat disimpulkan bahwa penyakit ISPA tidak mewabah ketika $R_0 > 1$ dengan $R_0 = 0{,}0234$

4.6.2 *Simulasi Model Untuk* $R_0 > 1$



Gambar 3. proporsi subpopulasi *S, E, H, A* dan *R* untuk $R_0 > 1$

Pada gambar 3 bahwa laju pertumbuhan subpopulasi *susceptible* mengalami peningkatan karena adanya laju kelahiran dan menurung hingga 2,9 dikarenakan individu yang rentan menjadi individu yang terpapar dan adanya kematian alami dan subpopulasi *Exposed* mengalami peningkatan karena adanya individu yang rentan menjadi individu yang terpapar hingga menuju ke 0,14. Pada subpopulasi, *Infected ISPA,* mengalami peningkatan dikarenakan adanya individu yang terpapar menjadi individu yang terinfeksi hingga menuju ke 0,17 *Infected Asthma* menurung dikarenakan adanya kematian akibat penyakit dan kematian alami dan *Recoved* mengalami penurunan dikarenakan telah sembuh dan adanya kematian alami. Hasil simulasi yang dilakukan sesuai dengan hasil analisis titik kesetimbangan yang dikerjakan sebelumnya. Dapat disimpulkan bahwa penyakit ISPA berpotensi menjadi wabah ketikan $R_0 > 1$ dengan $R_0 = 1{,}6800$.

V. KESIMPULAN

Model matematika SEHAR menghasilkan dua titik kesetimbangan yaitu

a. Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil jika $R_0<1$

b. Titik kesetimbangan endemik akan stabil jika $R_0>1$

Berdasarkan hasil simulasi yang dilakukan sesuai dengan hasil analisis kestabilan titik kesetimbangan sebelumnya bahwa penyakit akan hilang jika $R_0<1$ dengan $R_0=0.0{,}34$ dan penyakit akan mewabah jika $R_0>1$ dan nilai $R_0=1{,}6800$

REFERENSI

[1] Kurniawan.B dkk. 2018. Membanguan Model Matematika Penyebaran Penyakit ISPA, *Jurnal Matematika dan Terapan* no.15.pp.36-47.januari.2018

[2] Jusrawati. 2018. *Pemodelan Matematika Terhadap Kelangsungan Hidup Penderita Diabetes Melitus*, Makassar: Universitas Islam Negeri (UIN) Alauddin.

[3] Pagalay. Usman. 2009. *Mathematical Modeling (Aplikasi Pada Kedokteran Imunologi, Biologi, Ekonomi, Dan Perikanan).*Malang.

[4] Boyce, W. E. dan R. C.Diprima. 2009. *Elementary Differential Equation and Boundary Value Problem. Ninth Edition.* John Wiley and Sons, Inc.USA.

[5] Ross, L. Shepley. 1987. *Differential Equations 3th*. New York: University of New Hapshire

[6] Finizio, N. Dan G. Ladas. 1982. *An Introduction to Differential Equations with Difference Equation, Fourier, Series, and Partial Differential Equations*.

Wadswoth Publishing Company. Belmont, California.

[7] Juliah, Intan. 2015. *Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Model Matematika Proses Transmisi Virus Dengue di dalam Tubuh Manusia dengan Terapi Obat Herbal,* Semarang: Universitas Negeri Semarang.

[8] Kocak, H. and Hole, J.K. 1991. *Dynamical and Bifurcation.* New York: Springer-Verlag.

[9] Wiggins, Stephen. 2003, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical System and Chaos, Second Edition.* New York: Springer-Verlag

[10] Anton, H & Rorres, C. 2014. *Elementary Linear Algebra 11th Edition.* USA: John Wiley & Sons, Inc.

[11] Diekmann.O dan Heesterbee. J.A.P. 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Disease,* John Wiley &Sons Ltd., Chicester.

[12] Olsder. G.J. dkk. 1998. *Mathematical System Theory Second Edition.* Faculty On Information Technologhy and Sistem Deft Unoversity.