JOMTA
Journal of Mathematics: Theory and Applications
Vol. 3, No. 1, 2021, P-ISSN 2685-9653 e-ISSN 2722-2705

Pengintegralan Numerik untuk Interval Titik yang Tidak Sama menggunakan Aturan Boole

Nopriani[1], Ahmad Ansar[2], Darma Ekawati[3]
[1,2] Program Studi Matematika, Universitas Sulawesi Barat, Indonesia
[3] Program Studi Statistika, Universitas Sulawesi Barat, Indonesia
e-mail: [1]nopriani221@gmail.com, [2]ahmad.ansar@unsulbar.ac.id, [3]darmaekawati@unsulbar.ac.id

Abstrak. Secara umum pengintegralan numerik didasarkan pada interval titik yang sama namum pada kenyataannya dihadapkan pada persoalan pengintegralan numerik dengan interval titik yang tidak sama. Penelitian ini dilakukan untuk memperoleh rumus umum pengintegralan numerik untuk interval titik yang tidak sama dengan menggunakan selisih terbagi Newton sehingga diperoleh rumus umum dan *error* dari integrasi numerik dengan menggunakan aturan Boole. Selanjutnya disimulasikan contoh integrasi numerik dengan bantuan Program MATLAB untuk membandingkan hasil numerik dan analitik sehingga diperoleh hasil yang mendekati nilai eksak. Berdasarkan hasil simulasi numerik diketahui bahwa semakin banyak subinterval yang digunakan maka semakin menghampiri solusi eksak atau solusi sejati.

Kata kunci: Integrasi Numerik, Interval Titik yang Tidak Sama, Selisih Terbagi Newton, Aturan Trapesium, Aturan Simpson, Aturan Boole, Error.

Abstract. *In general, numerical integration is based on the same point interval but in reality, sometimes it is faced with numerical integration problems with uniqual point intervals. This research was conducted to obtain a general formula for numerical integration for uniqual point intervals using Newton's dividing diference so that the general formula for Boole rules with errors of that rule. furthermore, numerical integration example is simulated with the help of the MATLAB program to compare numerical and analitycal results so that the results are close to the exact values. From the simulation results, it is known that the more subintevals (partitions) used, the closer to the exact solution.*

***Keywords**: Numerical Integration, Unequal Point Intervals, Newton's Dividing Diference, Trapezoid's rule, Simpson's rule, Boole rule, Error.*

I. PENDAHULUAN

Dalam ilmu kalkulus, integral merupakan salah satu dari dua pokok bahasan yang mendasar di samping turunan (derivatif). Fungsi integral merupakan kebalikan dari fungsi turunan. Secara umum fungsi integral dibagi atas fungsi integral tentu dan fungsi integral tak tentu. Fungsi integral tentu memiliki batasan nilai fungsi, sedangkan fungsi integral tak tentu tidak memiliki batasan nilai fungsi [1]. Ilmu kalkulus memiliki aturan penyelesaian fungsi integrasi untuk memperoleh solusi analitik (eksak) dari fungsi integral. Namun dalam prakteknya seringkali dijumpai fungsi yang diintegrasikan (*integrand*) adalah fungsi empirik yang diberikan dalam bentuk tabel, atau fungsi eksplisit f yang diberikan terlalu rumit untuk diintegralkan menggunakan ilmu kalkulus. Karena itu solusiya hanya dapat dihitung dengan metode numerik [1].

Persolaan integrasi numerik adalah menghitung secara numerik integral tentu $I = \int_a^b f(x)dx$ yang dalam hal ini a dan b batas batas integrasi, f adalah fungsi yang dapat diberikan secara eksplisit dalam bentuk persamaan ataupun secara empirik dalam bentuk tabel nilai.

Terdapat tiga pendekatan dalam menurunkan rumus integrasi numerik yaitu metode pias, metode Newton-Cotes, dan metode Kuadratur Gauss [2]. Metode Newton-Cotes adalah metode yang umum digunakan dalam menurunkan rumus integrasi numerik. Polinom interpolasi menjadi dasar metode Newton-Cotes. Gagasannya adalah menghampiri fungsi $f(x)$ dengan polinom interpolasi $p_n(x)$ karena suku-suku polinom mudah diintegralkan dengan rumus integral yang sudah baku. Beberapa kaidah integrasi numerik yang terkenal di turunkan dari metode Newton-Cotes yaitu kaidah trapesium (*trapezodial rule*), kaidah *simpson* 1/3 (*Simpson's 1/3 rule*), kaidah *simpson* 3/8 (*Simpson's 3/8 rule*) [2]

Munir [2] membahas tentang integrasi numerik dimana rumus untuk pengintegralan numerik didasarkan pada interval titik yang sama. Tetapi pada kenyataannya kadang kadang dihadapkan pada persoalan pengintegralan suatu fungsi dengan interval titik yang tidak sama. Pada sebelumnya telah dibahas tentang integrase numerik dengan menggunakan aturan trapezium, simpson 1/3 dan simpson 3/8 [3] serta dan Pengintegralan menggunakan aturan Simpson untuk interval titik yang tidak sama [4]. Kedua penelitian tersebut membahas mengenai integrasi numerik untuk interval titik yang tidak sama menggunakan aturan Trapesium dan aturan *Simpson* serta perbandingan hasil dari keduanya.

Pada artikel ini, peneliti mengembangkan penelitian sebelumnya dengan memperluas metode yang digunakan yaitu aturan *Boole*. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus umum integrasi numerik menggunakan aturan *Boole* untuk interval titik yang tidak sama dan persamaan eror dari aturan tersebut.

II. LANDASAN TEORI

2.1 Integrasi Numerik

Integrasi numerik adalah suatu metode yang digunakan untuk mendapatkan nilai hampiran dari beberapa integral tentu yang memerlukan penyelesaian numerik sebagai hampirannya. Solusi hampiran yang dihasilkan memang tidak tepat sama dengan solusi analitik. Akan tetapi dapat ditentukan selisih antara solusi analitik dan solusi numerik sekecil mungkin. Dari semua fungsi yang ada, fungsi polinomial yang paling mudah diintegrasikan. Namun demikian kenyataannya seringkali dihadapkan pada permasalahan dimana integrasi harus dilakukan pada fungsi yang tidak mudah untuk diintegrasikan secara analitik atau bahkan fungsi hanya diberikan dalam bentuk data diskrit [5].

Pada umumnya, perhitungan integral secara numerik bekerja dengan sejumlah titik titik diskrit. Karena data yang ditabulasikan sudah berbentuk demikian, maka secara alamiah sesuai dengan kebanyakan metode integrasi. Untuk fungsi terus menerus, titik titik diskrit itu diperoleh dengan mengunakan persamaan fungsi yang diberikan untuk menghasilkan tabel nilai. Dihubungkan dengan tafsiran geometri integral tentu, titik titik pada pada tabel sama dengan membagi selang integrasi $[a, b]$ menjadi n buah pias (strip) atau segmen [6]. Lebar tiap pias adalah

$$h = \frac{b-a}{n} \tag{1}$$

Titik absis pias dinyatakan sebagai

$$x_r = a + rh \qquad r = 0,1,2,3 \ldots n. \tag{2}$$

Dan nilai fungsi pada titik absis pias adalah

$$f_r = f(x_r)$$

Luas daerah integrasi $[a, b]$ dihampiri sebagai luas n buah pias. Metode integrasi numerik yang berbasis ini disebut metode pias [6].

2.2. Polinom Newton

Polinom Newton dibentuk untuk membuat polinom derajat yang lebih tinggi [2]. Polinom Newton dapat ditulis dalam bentuk polinom yang lengkap sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p_n(x) = {} & f(x_0) + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \\ & (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \\ & (x - x_0) \ldots (x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n] \end{aligned} \tag{3}$$

2.3. Persamaan Umum Integrasi Numerik untuk Interval Titik yang Sama

Diberikan integral tentu $\int_{x_0}^{x_n} y\,dx$ dengan interval x_0 sampai x_n dibagi dalam n partisi dengan jarak tiap partisi tidak sama. Diketahui rumus umum interpolasi Newton dengan selisih terbagi adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} p_n(x) = y = {} & y_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + \\ & (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \\ & (x - x_0)\ldots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \ldots x_{n-1}, x_n] \end{aligned} \tag{4}$$

Kemudian persamaan (4) diintegralkan kedua ruas dari x_0 sampai x_n sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} y\,dx = {} & \int_{x_0}^{x_n} (y_0 + (x - x_0)[x_0, x_1] + \\ & (x - x_0)(x - x_1)[x_0, x_1, x_2] + \\ & (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)[x_0, x_1, x_2, x_3] + \\ & (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \\ & [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4] + \ldots)dx \\ = {} & y_0(x_n - x_0) + \frac{(x_n - x_0)^2}{2}[x_0, x_1] + \\ & \frac{1}{2}[x_0, x_1, x_2]((x_n - x_0)(x_n - x_1)^2 - \frac{1}{3}(x_n - x_1)^3 + \frac{1}{3}(x_0 - x_1)^3) + \\ & \frac{1}{2}[x_0, x_1, x_2, x_3]((x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)^2 - \frac{1}{3}(x_n - x_0)(x_n - x_2)^3 - \frac{1}{3}(x_n - x_1)(x_n - x_2)^3 + \frac{1}{3}(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)^3 + \\ & \frac{1}{6}(x_n - x_2)^4 - \frac{1}{6}(x_0 - x_2)^4) \\ & + \frac{1}{2}[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]((x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)^2 - \frac{1}{3}(x_n - x_0)(x_n - x_2)(x_n - x_3)^3 - \\ & \frac{1}{3}(x_n - x_1)(x_n - x_2)(x_n - x_3)^3 \\ & + \frac{1}{3}(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)^3 - \frac{1}{3}(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_3)^3 + \frac{1}{6}(x_n - x_0)(x_n - x_3)^4 + \\ & \frac{1}{6}(x_n - x_2)(x_n - x_3)^4 - \frac{1}{6}(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)^4 + \frac{1}{6}(x_n - x_1)(x_n - x_3)^4 - \\ & \frac{1}{6}(x_0 - x_1)(x_0 - x_3)^4 - \frac{1}{10}(x_n - x_3)^5 + \frac{1}{10}(x_0 - x_3)^5) + \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Persamaan (5) disebut rumus umum pengintegralan numerik untuk interval titik yang tidak sama. Dari rumus umun tersebut maka dapat diperoleh rumus pengintegralan yang berbeda dengan memasukkan $n = 1,2,3,4$ dengan n merupakan jumlah partisi.

2.4. Aturan Trapesium untuk Interval Titik yang Tidak Sama

Dengan mensubsitusikan nilai $n = 1$ ke persamaan (5) diperoleh aturan Trapesium [3] yaitu:
untuk interval $[x_0, x_1]$:

$$\int_{x_0}^{x_1} ydx = y_0 (x_1 - x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} [x_0, x_1]$$

$$= y_0(x_1 - x_0) + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2} \frac{(y_1 - y_0)}{(x_1 - x_0)}$$

$$= \frac{(x_1 - x_0)}{2} (y_0 + y_1)$$

untuk interval $[x_1, x_2], [x_2, x_3], \ldots [x_{n-1}, x_n]$ diperoleh:

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} ydx = \frac{(x_n - x_{n-1})}{2} (y_{n-1} + y_n)$$

sehingga diperoleh:

$$\int_{x_0}^{x_n} ydx = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i-1})}{2} (y_{i-1} + y_i) \qquad (6)$$

Persamaan (6) merupakan rumus umum aturan Trapesium untuk interval titik yang tidak sama [3].
dengan total *error* yaitu:

$$E_{total} = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})^3 y''_{i-1} \qquad (7)$$

2.5 Aturan Simpson 1/3 untuk Interval Titik yang Tidak Sama

Dengan mensubsitusikan nilai $n = 2$ ke persamaan (5) diperoleh aturan Simpson 1/3 [3] yaitu:
untuk interval $[x_0, x_2]$ diperoleh:

$$\int_{x_0}^{x_2} ydx = y_0(x_2 - x_0) + \frac{(x_2 - x_0)^2}{2} [x_0, x_1] + \frac{1}{2} [x_0, x_1, x_2]((x_2 - x_0)(x_2 - x_1)^2 - \frac{1}{3} (x_2 - x_1)^3 + \frac{1}{3} (x_0 - x_1)^3)$$

sehingga untuk interval $[x_0, x_n]$ diperoleh:

$$\int_{x_0}^{x_n} ydx = \sum_{i=2,4,6,..}^{n} y_{i-2} (x_i - x_{i-2}) + \frac{(x_i - x_{i-2})^2}{2} [x_{n-2}, x_{n-1}] + \frac{1}{2} [x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]((x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1})^2 - \frac{1}{3} (x_i - x_{i-1})^3 + \frac{1}{3} (x_{i-2} - x_{i-1})^3) \qquad (8)$$

Persamaan (8) merupakan rumus umum aturan Simpson 1/3 untuk interval titik yang tidak sama [3].
Dengan total *error* yaitu:

$$E_{total} = -\frac{1}{72} \sum_{i=2,4,6,..}^{n} (x_i - x_{i-2})^3 (x_{i-2} - 2x_{i-1} + x_i)\, y'''_{i-2} \qquad (9)$$

2.6 Aturan Simpson 3/8 untuk Interval Titik yang Tidak Sama

Dengan mensubsitusikan nilai $n = 3$ ke persamaan (5) diperoleh Aturan simpson 3/8 [3] yaitu:
untuk interval $[x_0, x_3]$diperoleh:

$$\int_{x_0}^{x_3} ydx = y_0(x_3 - x_0) + \frac{(x_3 - x_0)^2}{2} [x_0, x_1] + \frac{1}{2} [x_0, x_1, x_2]((x_3 - x_0)(x_3 - x_1)^2 - \frac{1}{3} (x_3 - x_1)^3 + \frac{1}{3} (x_0 - x_1)^3) + \frac{1}{2} [x_0, x_1, x_2, x_3]((x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)^2 - \frac{1}{3} (x_3 - x_0)(x_3 - x_2)^3 - (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)^3 + \frac{1}{3} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)^3 + \frac{1}{6} (x_3 - x_2)^4 - \frac{1}{6} (x_0 - x_2)^4)$$

untuk interval $[x_0, x_n]$ diperoleh:

$$\int_{x_0}^{x_n} ydx = \sum_{i=3,6,9,\ldots}^{n} y_{i-3} (x_i - x_{i-3}) + \frac{(x_i - x_{i-3})^2}{2} [x_{i-3}, x_{i-2}] + \frac{1}{2} [x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}]((x_i - x_{i-3})(x_i - x_{i-2})^2 - \frac{1}{3} (x_i - x_{i-2})^3 + \frac{1}{3} (x_{i-3} - x_{i-2})^3) + \frac{1}{2} [x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]((x_i - x_{i-3})(x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1})^2 - \frac{1}{3} (x_i - x_{i-3})(x_i - x_{i-1})^3 - \frac{1}{3} (x_i - x_{i-2})(x_i - x_{i-1})^3 + \frac{1}{3} (x_{i-3} - x_{i-2})(x_{i-3} - x_{i-1})^3 + \frac{1}{6} (x_i - x_{i-1})^4 - \frac{1}{6} (x_{i-3} - x_{i-1})^4) \qquad (10)$$

Persamaan (10) merupakan rumus umum aturan Simpson 3/8 untuk interval titik yang tidak sama [3].
dengan total *error* adalah:

$$E_{total} = -\frac{1}{1440} \sum_{i=3,6,9\ldots}^{n} (x_i - x_{i-3})^3 (3x_i^2 + 3x_{i-3}^2 + 4x_i x_{i-3} + 10x_{i-1} x_{i-2} - 5x_i x_{i-2} - 5x_{i-2} x_{i-3} - 5x_i x_{i-1} - 5x_{i-1} x_{i-3}) y_{i-3}^{iv} + \ldots \qquad (11)$$

III. METODE

Penelitian yang dilakukan merupakan penelitian teoritis dengan menganalisis teori-teori yang relevan terhadap permasalahan yang dibahas berdasarkan pada kajian pustaka. Prosedur penelitian yang diterapkan dalam penelitian ini guna mencapai tujuan penelitian, adalah sebagai berikut:

1. Membentuk rumus umum persamaan integrasi numerik untuk interval titik yang tidak sama
2. Memasukkan jumlah n (dengan n merupakan jumlah partisi) pada rumus umum pengintegralan numerik untuk interval titik yang tidak sama untuk mendapatkan rumus aturan Boole
3. Membentuk persamaan error Aturan Boole menggunakan deret taylor,
4. Menghitung integral dengan aturan Trapesium, aturan Simpson, dan aturan Boole untuk interval titik yang tidak sama pada contoh

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

4.1 Aturan Boole untuk Interval Titik yang Tidak Sama

Dengan mensubsitusikan nilai $n = 4$ ke persamaan (5) diperoleh aturan Boole untuk interval titik yang tidak sama yaitu:

untuk interval $[x_0, x_4]$diperoleh:

$$\int_{x_0}^{x_n} ydx = y_0(x_4 - x_0) + \frac{(x_4-x_0)^2}{2}[x_0,x_1] + \frac{1}{2}[x_0,x_1,x_2]((x_4-x_0)(x_4-x_1)^2 - \frac{1}{3}(x_4-x_1)^3 + \frac{1}{3}(x_0-x_1)^3) + \frac{1}{2}[x_0,x_1,x_2,x_3]((x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)^2 - \frac{1}{3}(x_4-x_0)(x_4-x_2)^3 - \frac{1}{3}(x_4-x_1)(x_4-x_2)^3 + \frac{1}{3}(x_0-x_1)(x_0-x_2)^3 + \frac{1}{6}(x_4-x_2)^4 - \frac{1}{6}(x_0-x_2)^4) + \frac{1}{2}[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]((x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)^2 - \frac{1}{3}(x_4-x_0)(x_4-x_2)(x_4-x_3)^3 - \frac{1}{3}(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)^3 + \frac{1}{3}(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)^3 - \frac{1}{3}(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_3)^3 + \frac{1}{6}(x_4-x_0)(x_4-x_3)^4 + \frac{1}{6}(x_4-x_2)(x_4-x_3)^4 - \frac{1}{6}(x_0-x_2)(x_0-x_3)^4 + \frac{1}{6}(x_4-x_1)(x_4-x_3)^4 - \frac{1}{6}(x_0-x_1)(x_0-x_3)^4 - \frac{1}{10}(x_4-x_3)^5 + \frac{1}{10}(x_0-x_3)^5) + \ldots$$

untuk interval $[x_0, x_n]$ diperoleh:

$$\int_{x_0}^{x_n} ydx = \sum_{i=4,8,12,\ldots}^{n} y_{i-4}(x_i - x_{i-4}) + \frac{(x_i-x_{i-4})^2}{2}[x_{i-4},x_{i-3}] + \frac{1}{2}[x_{i-4},x_{i-3},x_{i-2}]((x_i-x_{i-4})(x_i-x_{i-3})^2 - \frac{1}{3}(x_i-x_{i-3})^3 + \frac{1}{3}(x_{i-4}-x_{i-3})^3) + \frac{1}{2}[x_{i-4},x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1}]((x_i-x_{i-4})(x_i-x_{i-3})(x_i-x_{i-2})^2 - \frac{1}{3}(x_i-x_{i-4})(x_i-x_{i-2})^3 - \frac{1}{3}(x_i-x_{i-3})(x_i-x_{i-2})^3 + \frac{1}{3}(x_{i-4}-x_{i-3})(x_{i-4}-x_{i-2})^3 + \frac{1}{6}(x_i-x_{i-2})^4 - \frac{1}{6}(x_{i-4}-x_{i-2})^4 + \frac{1}{2}[x_{i-4},x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1},x_n]((x_i-x_{i-4})(x_i-x_{i-3})(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})^2 - \frac{1}{3}(x_i-x_{i-4})(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})^3 - \frac{1}{3}(x_i-x_{i-3})(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})^3 + \frac{1}{3}(x_{i-4}-x_1)(x_{i-4}-x_{i-2})(x_{i-4}-x_{i-1})^3 - \frac{1}{3}(x_i-x_{i-4})(x_i-x_{i-3})(x_i-x_{i-1})^3 + \frac{1}{6}(x_i-x_{i-4})(x_i-x_{i-1})^4 + \frac{1}{6}(x_i-x_{i-2})(x_i-x_{i-1})^4 - \frac{1}{6}(x_{i-4}-x_{i-2})(x_{i-4}-x_{i-1})^4 + \frac{1}{6}(x_i-x_{i-3})(x_i-x_{i-1})^4 - \frac{1}{6}(x_{i-4}-x_{i-3})(x_{i-4}-x_{i-1})^4 - \frac{1}{10}(x_i-x_{i-1})^5 + \frac{1}{10}(x_{i-4}-x_{i-1})^5) + \ldots \quad (12)$$

Persamaan (12) merupakan rumus umum aturan Boole untuk interval titik yang tidak sama.

4.2 Persamaan Error Aturan Boole untuk Interval Titik yang Tidak Sama

Diberikan $y = f(x)$ kontinu pada selang $[a, b]$. Diketahui deret taylor di sekitar $x = x_0$ adalah sebagai berikut:

$$f(x) = y_0 + \frac{(x-x_0)}{1!}y_0{}' + \frac{(x-x_0)^2}{2!}y_0'' + \frac{(x-x_0)^3}{3!}y_0''' + \frac{(x-x_0)^4}{4!}y_0^{iv} + \frac{(x-x_0)^5}{5!}y_0^{v} + \ldots \quad (13)$$

dengan integral x_0 sampai x_4 dari $f(x)$ yaitu:

$$\int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = y_0(x_3 - x_0) + \frac{(x_4-x_0)^2}{2}y_0' + \frac{(x_4-x_0)^3}{12}y_0'' + \frac{(x_4-x_0)^4}{24}y_0''' + \frac{(x_4-x_0)^5}{120}y_0^{iv} + \frac{(x_4-x_0)^6}{720}y_0^{v} + \ldots \quad (14)$$

dari persamaan (12) diperoleh:

$$\int_{x_0}^{x_4} y\,dx = (y_0(x_4 - x_0) + \frac{(x_4-x_0)^2}{2}[x_0,x_1] + \frac{1}{2}[x_0,x_1,x_2]((x_4-x_0)(x_4-x_1)^2 - \frac{1}{3}(x_4-x_1)^3 + \frac{1}{3}(x_0-x_1)^3) + \frac{1}{2}[x_0,x_1,x_2]((x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)^2 - \frac{1}{3}(x_4-x_0)(x_4-x_2)^3 - \frac{1}{3}(x_4-x_1)(x_4-x_2)^3 + \frac{1}{3}(x_0-x_1)(x_0-x_2)^3 + \frac{1}{6}(x_4-x_2)^4 - \frac{1}{6}(x_0-x_2)^4) + \frac{1}{2}[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]((x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)^2 - \frac{1}{3}(x_4-x_0)(x_4-$$

$x_2)(x_4-x_3)^3 - \frac{1}{3}(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)^3 + \frac{1}{3}(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)^3 - \frac{1}{3}(x_4-x_0)(x_4-x_1)(x_4-x_3)^3 + \frac{1}{6}(x_4-x_0)(x_4-x_3)^4 + \frac{1}{6}(x_4-x_2)(x_4-x_3)^4 - \frac{1}{6}(x_0-x_2)(x_0-x_3)^4 + \frac{1}{6}(x_4-x_1)(x_4-x_3)^4 - \frac{1}{6}(x_0-x_1)(x_0-x_3)^4 - \frac{1}{10}(x_4-x_3)^5 + \frac{1}{10}(x_0-x_3)^5)))$ (15)

dengan selisih terbagi:

$$[x_0,x_1] = \frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}, [x_0,x_1,x_2] = \frac{[x_1,x_2]-[x_0,x_1]}{x_2-x_0}, [x_0,x_1,x_2,x_3] = \frac{[x_1,x_2,x_3]-[x_0,x_1,x_2]}{x_3-x_0}$$

dan $[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4] = \dfrac{[x_1,x_2,x_3,x_4]-[x_0,x_1,x_2,x_3]}{x_4-x_0}$

masukkan nilai $x = x_1$, $x = x_2$, $x = x_3$, $x = x_4$ pada persamaan (13) diperoleh:

$$f(x_1) \approx y_1 = y_0 + \frac{(x_1-x_0)}{1!}y_0' + \frac{(x_1-x_0)^2}{2!}y_0'' + \frac{(x_1-x_0)^3}{3!}y_0''' + \frac{(x_1-x_0)^4}{4!}y_0^{iv} + \frac{(x_1-x_0)^5}{5!}y_0^{v} + \ldots$$

$$f(x_2) \approx y_2 = y_0 + \frac{(x_2-x_0)}{1!}y_0' + \frac{(x_2-x_0)^2}{2!}y_0'' + \frac{(x_2-x_0)^3}{3!}y_0''' + \frac{(x_3-x_0)^4}{4!}y_0^{iv} + \frac{(x_2-x_0)^5}{5!}y_0^{v} + \ldots$$

$$f(x_3) \approx y_3 = y_0 + \frac{(x_3-x_0)}{1!}y_0' + \frac{(x_3-x_0)^2}{2!}y_0'' + \frac{(x_3-x_0)^3}{3!}y_0''' + \frac{(x_3-x_0)^4}{4!}y_0^{iv} + \frac{(x_3-x_0)^5}{5!}y_0^{v} + \ldots$$

$$f(x_4) \approx y_4 = y_0 + \frac{(x_4-x_0)}{1!}y_0' + \frac{(x_4-x_0)^2}{2!}y_0'' + \frac{(x_4-x_0)^3}{3!}y_0''' + \frac{(x_4-x_0)^4}{4!}y_0^{iv} + \frac{(x_4-x_0)^5}{5!}y_0^{v} + \ldots$$

sehingga dari persamaan (15) diperoleh:

$$\int_{x_0}^{x_4} y\,dx = y_0(x_4-x_0) + \frac{1}{2}(x_4-x_0)^2 y_0' + \frac{1}{6}(x_4-x_0)^3 y_0'' + \frac{1}{24}(x_4-x_0)^4 y_0''' + \frac{1}{120}(x_4-x_0)^5 y_0^{iv} + \frac{1}{7200}(x_4-x_0)^3(12x_4^3 - 3x_4^2x_3 - 3x_4^2x_2 - 3x_4^2x_1 - 27x_4^2x_0 + 5x_4x_3x_2 + 5x_4x_3x_1 + 5x_4x_2x_1 - 4x_4x_3x_0 - 4x_4x_2x_0 - 4x_4x_1x_0 + 33x_4x_0^5 - 10x_3x_2x_1 + 5x_3x_2x_0 + 5x_3x_1x_0 - 3x_3x_0^2 + 5x_2x_1x_0 - 3x_2x_0^2 - 3x_1x_0^2 - 8x_0^3))y_0^{v} + \ldots \quad (16)$$

kurangkan persamaan (14) dan (16) untuk memperoleh *error* interval $[x_0, x_4]$yaitu:

$$E = -\frac{1}{7200}(x_4-x_0)^3(2x_4^3 - 3x_4^2x_3 - 3x_4^2x_2 - 3x_4^2x_1 - 3x_4^2x_0 + 5x_4x_3x_2 + 5x_4x_3x_1 + 5x_4x_2x_1 - 4x_4x_3x_0 - 4x_4x_2x_0 - 4x_4x_1x_0 + 3x_4x_0^2 - 10x_3x_2x_1 + 5x_3x_2x_0 + 5x_3x_1x_0 - 3x_3x_0^2 + 5x_2x_1x_0 - 3x_2x_0^2 - 3x_1x_0^2 + 2x_0^3)y_0^{v} + \ldots$$

Dengan total error yaitu:

$$E_{total} - \frac{1}{7200}\sum_{i=4,8,12,\ldots}^{n}(x_i - x_{i-4})^3(2x_i^3 - 3x_i^2x_{i-1} - 3x_i^2x_{i-2} - 3x_i^2x_{i-3} - 3x_i^2x_{i-4} + 5x_ix_{i-1}x_{i-2} + 5x_ix_{i-1}x_{i-3} + 5x_ix_{i-2}x_{i-3} - 4x_ix_{i-1}x_{i-4} - 4x_ix_{i-2}x_{i-4} - 4x_ix_{i-3}x_{i-4} + 3x_ix_{i-4}^2 - 10x_{i-1}x_{i-2}x_{i-3} + 5x_{i-1}x_{i-2}x_{i-4} + 5x_{i-1}x_{i-3}x_{i-4} - 3x_{i-1}x_{i-4}^2 + 5x_{i-2}x_{i-3}x_{i-4} - 3x_{i-2}x_{i-4}^2 - 3x_{i-3}x_{i-4}^2 + 2x_{i-4}^3)y_{i-4}^{v} + \ldots \quad (17)$$

4.3. Simulasi Numerik

Berdasarkan formula pengintegralan numerik dengan interval titik yang tidak sama dan error dengan menggunakan aturan *Boole* dilakukan simulasi numerik dengan menggunakan menggunakan software MATLAB pada beberapa contoh soal integrase numerik untuk membandingkan nilai solusi eksak dan solusi numeriknya yang disajikan pada tabel 1 – 4 berikut.

Tabel 1. Interval titik yang tidak sama untuk $f(x) = 14^{2x}$ pada selang [0,1] dengan 240 partisi

Interval	Nilai x	Nilai $y = f(x)$
0	0	1.000000
1	0.0039	1.020798
2	0.0076	1.040929
3	0.0078	1.042029
4	0.0114	1.062018
5	0.0124	1.067638
6	0.0128	1.069894
7	0.0130	1.071024
8	0.0164	1.090418
9	0.0247	1.139249
10	0.0268	1.151947
…	....	....
…	....	....
…	....	....
236	0.9825	178.707
237	0.9830	179.1793
238	0.9834	179.5579
239	0.9840	180.1275
240	1.0000	196

Selanjutnya, nilai dari tabel 1 digunakan untuk mencari solusi numerik dari $\int_0^1 14^{2x}\,dx$ dengan aturan trapezium, simpson 1/3, simpson 3/8 dan boole yang disajikan pada tabel 2 berikut

Tabel 2. Solusi numerik dari $\int_0^1 14^{2x}\,dx$

Aturan	Solusi Numerik	Error
Trapesium	36.9561	0.030054
Simpson 1/3	36.9412	0.010272
Simpson 3/8	36.9372	0.021089
Boole	36.9371	0.021532

Dari hasil simulasi contoh pertama di atas terlihat bahwa solusi integrasi numerik dengan menggunakan aturan Boole dengan 240 partisi sebesar 36.9371 sedangkan solusi eksaknya adalah 36.94501.

Tabel 3. Interval titik yang tidak sama untuk fungsi $f(x) = x^2e^{-x^3}$ pada selang [0,2] dengan 120 partisi

Interval	Nilai x	Nilai $y = f(x)$
0	0	0000000
1	0.0024	0.000006
2	0.0147	0.000216
3	0.0195	0.000380
4	0.0497	0.002470
…	....	....
…	....	....
…	....	....
116	1.9231	0.003014
117	1.9243	0.002978
118	1.9430	0.002462
119	1.9595	0.002074
120	2.0000	0.001342

Selanjutnya, nilai dari tabel 3 digunakan untuk mencari solusi numerik dari $\int_0^2 x^2e^{-x^3}\,dx$ dengan aturan trapezium, simpson 1/3, simpson 3/8 dan boole yang disajikan pada tabel 4 berikut

Tabel 4. Solusi numerik dari $\int_0^2 x^2e^{-x^3}\,dx$

Aturan	Solusi Numerik	Error
Trapesium	0.33309	0.039713
Simpson 1/3	0.33322	0.00066957
Simpson 3/8	0.33316	0.019815
Boole	0.33322	0.00067127

Dari hasil simulasi contoh kedua terlihat bahwa solusi integrasi numerik dengan menggunakan aturan Boole dengan 120 partisi sebesar 0.33316 dan solusi eksaknya adalah 0.3332215.

Berdasarkan dua contoh simulasi numerik tersebut dapat kita simpulkan bahwa aturan Boole dengan interval titik yangtidak sama dapat digunakan untuk mencari nilai hampiran dari integral suatu fungsi. Dimana semakin banyak subinterval (partisi) yang digunakan maka semakin menghampiri solusi *exact* (solusi sejati).

IV. KESIMPULAN

Dari Penelitian ini diperoleh pengintegalan numerik untuk interval titik yang tidak sama dimana interval $[x_0, x_n]$ dipartisi menjadi *n* subinterval yang jarak antar subintervalnya tidak sama dengan menggunakan aturan Boole. Peneliti berharap agar ada penelitian lebih lanjut mengenai integrasi numerik untuk interval titik yang tidak sama misalnya dengan menggunakan metode yang lain.

REFERENSI

[1] Nirsal, “Penggunaan Ekstrapolasi untuk Menyelesaikan Fungsi Integral Tentu,” *Jurnal ilmiah d'computerE*, Vol 4 Januari, pp. 45-54, 2014.

[2] R. Munir., *Metode Numerik*, Bandung: Informatika, 2015.

[3] Md. Mamun-Ur-Rashid Khan, M. R. Hossain, and S. Parvin, “Numerical Integration Schemes for Unequal Data Spacing,” *American Journal of Applied Mathematics*, Vol. 5, No. 2, pp. 48-56, 2017.

[4] Fitriani, A. Yusuf, and Y. Yulida, “Pengintegralan Menggunakan Aturan Simpson untuk Interval Titik yang Tidak Sama,” *Epsilon: Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, Vol 13, No.2, pp. 46-54. 2019.

[5] P.B. Kosasih, *Komputasi Numerik Teori dan Aplikasinya*, Yogyakarta: ANDI, 2006.

[6] H.D.Laksono, R. Afrianita, N. Pebriana, and Darwison *Metode Numerik dengan Matlab Edisi 2*, Teknosain, 2018.