JOMTA
Journal of Mathematics: Theory and Applications
Vol. 3, No. 2, 2021, P-ISSN 2685-9653 e-ISSN 2722-2705

Syarat Perlu dan Syarat Cukup Seminear-ring Komutatif Terhadap Operasi Perkalian

Meryta Febrilian Fatimah 1[1], Ahmad Ansar[2], Raswan[3]
[1, 2, 3] Program Studi Matematika, Universitas Sulawesi Barat, Indonesia
e-mail: [1]merytaff@unsulbar.ac.id; [2]ahmad.ansar@unsulbar.ac.id

Abstrak. Seminear-ring adalah hasil generalisasi dari semiring dan near-ring. Secara umum, seminear-ring belum tentu komutatif. Sehingga perlu diidentifikasi syarat perlu dan syarat cukup seminear-ring komutatif. Paper ini membahas seminear-ring komutatif khusus terhadap operasi perkalian, sebab terhadap operasi penjumlahannya belum tentu komutatif. Seminear-ring yang digunakan dalam paper ini adalah seminear-ring kanselasi dengan elemen satuan. Mathematics Subject Classification:16Y60,16Y99.

Kata kunci: seminear-ring, komutatif, elemen satuan, kanselasi

Abstract. *Seminear-ring is a generalization from semiring and near-ring. Generally, seminear-ring is not necessarily commutative. So that, we need to identify the necessary and sufficient conditions for the commutative seminear-ring. This paper discusses a special commutative seminear-ring for the multiplication operation, because the addition operation is not necessarily commutative. The seminear-ring used in this paper is the cancellation seminear-ring with identity element. Mathematics Subject Classification: 16Y60, 16Y99.*

Keywords*: seminear-ring, commutative, identity element, cancellative*

I. PENDAHULUAN

Fenomena himpunan bilangan bulat positif yang tidak memiliki invers terhadap operasi penjumlahannya mengkonstruksi struktur aljabar baru yang disebut dengan semiring. Konsep semiring sudah diperkenalkan oleh H. S. Vandiver pada tahun 1935. Lebih lanjut, ring yang menghilangkan aksioma komutatif terhadap operasi penjumlahannya serta sifat distributif kanannya mendefinisikan struktur baru yang disebut near-ring [1].

Seminear-ring merupakan hasil generalisasi dari semiring dan near-ring, yaitu operasi penjumlahan dan perkalian yang tidak memiliki invers serta hanya dilengkapi oleh satu hukum distributif [2]. Seminear-ring pertama kali didefinisikan oleh Van Hoon dan Rootselar pada tahun 1967 [3]. Beberapa konsep pada seminear-ring didefinisikan dengan cara yang sama seperti pada semiring maupun near-ring yaitu konsep komutatif pada seminear-ring [4], ideal pada seminear-ring yang telah dibahas oleh R. Perumal, dkk dan ideal subtraktif pada seminear-ring oleh Nanthaporn Kornthorng.

Fenomena himpunan semua bilangan asli yang dikenakan operasi penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{N}$ membentuk struktur seminear-ring, sebab terhadap operasi penjumlahan dan perkaliannya bersifat semigrup serta memenuhi hukum distributif kiri. Namun, konsep menarik yang diberikan seminear-ring bahwa tidak komutatif terhadap operasi penjumlahan serta perkaliannya. Dilain pihak, himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ memberikan hal yang berbeda, yaitu $\mathbb{N}$ terhadap operasi penjumlahan dan perkaliannya bersifat komutatif. Hal ini lah yang mendasari penulis untuk mengidentifikasi syarat perlu dan syarat cukup suatu seminear-ring komutatif.

II. LANDASAN TEORI

Untuk memahami munculnya definisi seminear-ring sebagai hasil generalisasi near-ring dan semiring, berikut ini diberikan definisi near-ring dan seminear-ring.

Definisi 2.1. [1]

Diberikan sebarang himpunan tak kosong R yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian. Himpunan R disebut semiring dan dinotasikan dengan $(R,+,\cdot)$ apabila memenuhi:

1. $(R,+)$ monoid komutatif dengan elemen identitas 0.
2. $(R,\cdot)$ monoid dengan elemen identitas $1 \neq 0$.
3. Untuk setiap $a,b,c \in R$ berlaku $a(b+c)=ab+ac$ dan $(a+b)c=ac+bc$.
4. Untuk setiap $a \in R$ berlaku $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Definisi 2.2. [2]

Diberikan sebarang himpunan tak kosong N yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian. Himpunan N disebut near-ring dan dinotasikan dengan $(\mathrm{N},+,\cdot)$ apabila memenuhi:

1. $(N,+)$ grup (tidak harus abelian).

2. $(N,\cdot)$ semigrup.
3. Untuk setiap $a,b,c \in N$ berlaku $(a+b)c = ac+bc$.

Berdasarkan [2] diberikan definisi seminear-ring.

Definisi 2.3. [2]

Diberikan sebarang himpunan tak kosong S yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan dan perkalian. Himpunan S disebut seminear-ring dan dinotasikan dengan $(S,+,\cdot)$ apabila memenuhi:

1. $(S,+)$ semigrup.
2. $(S,\cdot)$ semigrup.
3. Untuk setiap $a,b,c \in S$ berlaku $(a+b)c = ac+bc$.

Berikut ini adalah beberapa contoh seminear-ring.

Contoh 2.4.

Contoh-contoh dari seminear-ring.

1. Semua semiring $(S,+,\cdot)$ merupakan seminear-ring.
2. Himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ yang dikenakan operasi penjumlahan $(+)$ dan operasi perkalian kiri $(\cdot_L)$, yaitu untuk setiap $a,b \in \mathbb{N}$ berlaku $a+b = a+b$ dan $a \cdot_L b = a$ merupakan seminear-ring dan dinotasikan dengan $(\mathbb{N},+,\cdot_L)$.
3. Didefinisikan himpunan
$$\mathfrak{A} = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} | a,b \in \mathbb{N}\right\}$$
yang dilengkapi dengan operasi penjumlahan $\oplus$ dan perkalian $\odot$ di mana untuk setiap $A,B \in \mathfrak{A}$ berlaku $A \oplus B = A \cdot B$ dan $A \odot B = A$. Himpunan $(\mathfrak{A},\oplus,\odot)$ merupakan seminear-ring.

Seperti halnya pada semiring dan near-ring yang memiliki subsemiring serta subnear-ring, seminear-ring juga demikian.

Definisi 2.5. [2]

Diberikan himpunan tak kosong K, seminear-ring $(S,+,\cdot)$ dan $K \subseteq S$. Himpunan K, disebut subseminear-ring atas $(S,+,\cdot)$apabila K, merupakan seminear-ring atas operasi penjumlahan dan perkalian yang sama pada S.

Contoh 2.6.

Diberikan seminear-ring $(\mathbb{N},+,\cdot_L)$ seperti pada Contoh 2.4. Himpunan $\beta = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$ adalah subseminear-ring atas $\mathbb{N}$.

Berikut adalah syarat perlu dan syarat cukup suatu seminear-ring bagian atau subseminear-ring.

Teorema 2.7. [2]

Diberikan seminear-ring $(S,+,\cdot)$, $K \neq \emptyset$ dan $K \subseteq S$. Himpunan K dikatakan subseminear-ring atas S jika dan hanya jika untuk setiap $x,y \in K$ berlaku $x+y \in K$ dan $xy \in K$.

Bukti:

Diketahui K dikatakan subseminear-ring atas S, dengan mengambil sebarang $x,y \in K \subseteq S$, sifat ketertutupan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian diwariskan langsung oleh S. Sehingga $x+y, x\cdot y \in K$. Sebaliknya, dapat ditunjukkan dengan mudah bahwa K subseminear-ring atas S. ∎

III. METODE

Metode penelitian yang akan digunakan adalah studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Mempelajari artikel karya Hussain, 2016 dengan judul Quotient Seminear-rings. Artikel ini membahas tentang definisi serta sifat-sifat ideal pada seminear-ring diantaranya adalah ideal (ideal kanan dan ideal kiri), ideal prima, ideal semiprima, nil ideal, ideal semiprima lengkap, ideal prima lengkap, ideal prima tegas, serta ideal prima minimal pada seminear-ring.
2. Mempelajari sifat-sifat struktur seminear-ring yang telah dikaji sebelumnya melalui penelusuran literatur-literatur terkait. Seperti mempelajari sifat-sifat kekomutatifan pada semigrup dan near-ring [1],[4] untuk dapat diaplikasikan sifat komutatif pada seminear-ring.
3. Mempelajari sifat kanselasi pada semigrup dan near-ring untuk dapat didefinisikan pada seminear-ring dengan sifat kanselasi.
4. Mempelajari sifat elemen identitas pada semigrup, near-ring serta semiring untuk dapat dikonstruksi pada seminear-ring dengan elemen identitas.
5. Merumuskan syarat cukup dan syarat perlu seminear-ring komutatif terhadap operasi perkalian.

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum membahas tentang syarat cukup dan syarat perlu suatu seminear-ring komutatif, diberikan dahulu definisi seminear-ring dengan sifat kanselasi dan seminear-ring dengan elemen identitas. Berdasarkan definisi sifat kanselasi atas semigrup pada [5] didefinisikan sifat kanselasi kiri dan kanan pada seminear-ring sebagai berikut.

Definisi 4.1.

Diberikan seminear-ring $(S,+,\cdot)$. Seminear-ring S dikatakan memiliki sifat kanselasi kiri (kanan) apabila untuk setiap $a,b,c \in S$ berlaku

1. $a+b = a+c$ $(b+a = c+a)$ berakibat $b = c$
2. $a\cdot b = a\cdot c$ $(b\cdot a = c\cdot a)$ berakibat $b = c$.

Seminear-ring S dikatakan memiliki sifat kanselasi apabila S memiliki sifat kanselasi kiri dan kanan. Selanjutnya, didefinisikan eksistensi elemen identitas terhadap operasi penjumlahan dan perkalian pada seminear-ring S.

Definisi 4.2.

Diberikan seminear-ring $(S,+,\cdot)$. Seminear-ring S dikatakan memiliki identitas apabila terdapat $e \in S$ sehingga untuk setiap $a \in S$ berlaku

1. $a+e = e+a = a$
2. $a\cdot e = e\cdot a = a$.

Definisi 4.2. menyatakan bahwa elemen identitas pada seminear-ring S untuk operasi penjumlahan dan perkaliannya sama. Berikut ini adalah salah satu contoh yang memenuhi Definisi 4.2.

Contoh 4.3.

Himpunan semua bilangan asli $\mathbb{N}$ yang dikenakan operasi penjumlahan dan perkalian di $\mathbb{N}$ dengan definisi untuk setiap $a,b \in \mathbb{N}$ maka $a+b = a\cdot b$ dan $a\cdot b = max\{a,b\}$ merupakan seminear-ring dan dinotasikan dengan $(\mathbb{N},\cdot,\max)$. Lebih lanjut, semiring $(\mathbb{N},\cdot,max)$ adalah seminear-ring dengan elemen identitas sebab, ada $1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $a+1=a\cdot 1=1\cdot a=a$ dan $a\cdot 1=max\{a,1\}=max\{1,a\}=a$.

Torema 4.4. [4]

Diberikan seminear-ring kanselasi $(S,+,\cdot)$ dengan elemen identitas. Seminear-ring S adalah seminear-ring komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a,b\in S$ berlaku $a^2\cdot b=a\cdot b\cdot a$.

Bukti:

Ambil sebarang $a,b\in S$, maka $a=e+a$, untuk suatu $e\in S$. Perhatikan bahwa

$$a^2\cdot b=a\cdot b\cdot a$$

$$(e+a)^2\cdot b=(e+a)\cdot b\cdot(e+a)$$

$$(e+a)\cdot(e+a)\cdot b=(e+a)\cdot b\cdot(e+a)$$

$$(e\cdot e+e\cdot a+a\cdot e+a\cdot a)\cdot b=(e\cdot b+a\cdot b)(e+a)$$

$$(e+a+a+a\cdot a)\cdot b=(b+a\cdot b)(e+a)$$

$$b+a\cdot b+a\cdot b+a\cdot a\cdot b$$
$$=b+b\cdot a+a\cdot b+a\cdot b\cdot a$$

$$a\cdot b+a\cdot b+a\cdot a\cdot b=b\cdot a+a\cdot b+a\cdot b\cdot a$$

$$a\cdot a\cdot b+a\cdot b=a\cdot b\cdot a+b\cdot a$$

$$a^2\cdot b+a\cdot b=a\cdot b\cdot a+b\cdot a$$

Oleh karena $a^2\cdot b=a\cdot b\cdot a,$ maka

$$a\cdot b\cdot a+a\cdot b=a\cdot b\cdot a+b\cdot a$$

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

Dengan demikian terbukti bahwa seminear-ring S merupakan seminear-ring komutatif. Sebaliknya, jika diketahui Seminear-ring kanselasi S dengan elemen identitas adalah seminear-ring komutatif, maka untuk setiap $a,b\in S$ berlaku $a^2\cdot b=a\cdot a\cdot b=a\cdot b\cdot a$. ■

Teorema 4.5. [4]

Diberikan seminear-ring $(S,+,\cdot)$. Seminear-ring kanselasi S dengan elemen identitas adalah seminear-ring komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a,b\in S$ berlaku $a\cdot b^2=b\cdot a\cdot b$.

Bukti: Analog.

Secara umum, berdasarkan Teorema 4.4 dan Teorema 4.5 diberikan syarat cukup dan syarat perlu seminear-ring komutatif sebagai berikut.

Teorema 4.6. [4]

Diberikan seminear-ring $(S,+,\cdot)$. Seminear-ring kanselasi S dengan elemen identitas adalah seminear-ring komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a,b\in S$ berlaku $a^n\cdot b=a^{n-1}\cdot b\cdot a$, untuk suatu $n\geq 2$.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa S seminear-ring komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a,b\in S$ berlaku $a^n\cdot b=a^{n-1}\cdot b\cdot a$ dengan menggunakan prinsip induksi matematika. Perhatikan bahwa untuk $n=2$, berdasarkan Teorema 4.4, terbukti. Tinggal ditunjukkan untuk $n=k+1$ dengan asumsi benar untuk $n=k$, yaitu S seminear-ring komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a,b\in S$ berlaku $a^k\cdot b=a^{k-1}\cdot b\cdot a$. Perhatikan bahwa

$$a^{k+1}\cdot b=a\cdot a^k\cdot b=a\cdot a^{k-1}\cdot b\cdot a=a^k\cdot b\cdot a.$$

Dengan demikian, terbukti. ■

Teorema 4.7. [4]

Diberikan seminear-ring $(S,+,\cdot)$. Seminear-ring kanselasi S dengan elemen identitas adalah seminear-ring komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a,b\in S$ berlaku $a^n\cdot b=a\cdot b\cdot a^{n-1}$, untuk suatu $n\geq 2$.

Bukti: Analog.

Teorema 4.8. [4]

Diberikan seminear-ring $(S,+,\cdot)$. Seminear-ring kanselasi S dengan elemen identitas adalah seminear-ring komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a,b\in S$ berlaku $(a\cdot b)\cdot a=(b\cdot a)\cdot a$.

Bukti:

Ambil sebarang $a,b\in S$, oleh karena S seminear-ring komutatif, maka terbukti bahwa $(a\cdot b)\cdot a=(b\cdot a)\cdot a$. Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa S seminear-ring komutatif. Ambil sebarang $a,b\in S$, dengan $a=a+e$ perhatikan bahwa

$$\big((a+e)\cdot b\big)\cdot(a+e)=\big(b\cdot(a+e)\big)\cdot(a+e)$$

$$(a\cdot b+b)\cdot(a+e)=(b\cdot a+b)\cdot(a+e)$$

$$a\cdot b\cdot a+a\cdot b+b\cdot a+b=b\cdot a\cdot a+b\cdot a+b\cdot a+b$$

$$a\cdot b\cdot a+a\cdot b=b\cdot a\cdot a+b\cdot a$$

Oleh karena $(a\cdot b)\cdot a=(b\cdot a)\cdot a$, dan dengan menggunakan sifat kanselasi sehingga diperoleh

$$a\cdot b=b\cdot a.$$

Dengan demikian terbukti bahwa S seminear-ring komutatif. ■

Teorema 4.9. [4]

Diberikan seminear-ring $(S,+,\cdot)$. Seminear-ring kanselasi S dengan elemen identitas adalah seminear-ring komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a,b\in S$ berlaku $(a\cdot b)^2=b\cdot a^2\cdot b$.

Bukti:

Ambil sebarang $a,b\in S$, oleh karena S seminear-ring komutatif, maka terbukti bahwa $(a\cdot b)^2=a\cdot b\cdot a\cdot b=b\cdot a\cdot a\cdot b=b\cdot a^2\cdot b$. Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa S seminear-ring komutatif. Ambil sebarang $a,b\in S$, dengan $b=b+e$ perhatikan bahwa

$$\big(a\cdot(b+e)\big)^2=(b+e)\cdot a^2\cdot(b+e)$$

$$\big(a\cdot(b+e)\big)\big(a\cdot(b+e)\big)=(b\cdot a^2+a^2)\cdot(b+e)$$

$$(a\cdot b+a)(a\cdot b+a)=(b\cdot a^2+a^2)\cdot(b+e)$$

$$a\cdot b\cdot a\cdot b+a\cdot b\cdot a+a\cdot a\cdot b+a\cdot a$$
$$=b\cdot a^2\cdot b+b\cdot a^2+a^2\cdot b+a^2$$

$$a\cdot b\cdot a\cdot b+a\cdot b\cdot a=b\cdot a^2\cdot b+b\cdot a^2$$

Oleh karena $(a \cdot b)^2 = b \cdot a^2 \cdot b$, dan dengan menggunakan sifat kanselasi sehingga diperoleh

$$a \cdot b \cdot a = b \cdot a \cdot a.$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 4.8 terbukti bahwa S seminear-ring komutatif. ■

Teorema 4.10.

Diberikan seminear-ring $(S, +, \cdot)$. Seminear-ring kanselasi S dengan elemen identitas adalah seminear-ring komutatif jika dan hanya jika untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $(a \cdot b)^2 = (b \cdot a)^2$.

Bukti:

Ambil sebarang $a, b \in S$, oleh karena S seminear-ring komutatif, maka terbukti bahwa $(a \cdot b)^2 = (a \cdot b)(a \cdot b) = (b \cdot a)(b \cdot a) = (b \cdot a)^2$. Sebaliknya, akan ditunjukkan bahwa S seminear-ring komutatif. Ambil sebarang $a, b \in S$, dengan $b = b + e$ perhatikan bahwa

$$\big(a \cdot (b + e)\big)^2 = \big((b + e) \cdot a\big)^2$$

$$(a \cdot b + a)(a \cdot b + a) = (b \cdot a + a)(b \cdot a + a)$$

$$(a \cdot b)^2 + a \cdot b \cdot a + a \cdot a \cdot b + a \cdot a$$
$$= (b \cdot a)^2 + b \cdot a \cdot a + a \cdot b \cdot a + a \cdot a$$

$$(a \cdot b)^2 + a \cdot b \cdot a + a \cdot a \cdot b$$
$$= (b \cdot a)^2 + b \cdot a \cdot a + a \cdot b \cdot a$$

Oleh karena $(a \cdot b)^2 = (b \cdot a)^2$, dan dengan menggunakan sifat kanselasi pada seminear-ring S diperoleh

$$a \cdot b \cdot a + a \cdot a \cdot b = b \cdot a \cdot a + a \cdot b \cdot a.$$

Berdasarkan Teorema 4.3, diperoleh bahwa

$$a \cdot b \cdot a + a \cdot a \cdot b = b \cdot a \cdot a + a^2 \cdot b$$

$$a \cdot b \cdot a + a \cdot a \cdot b = b \cdot a \cdot a + a \cdot a \cdot b$$

$$a \cdot b \cdot a = b \cdot a \cdot a$$

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

Dengan demikian S seminear-ring komutatif. ■

IV. KESIMPULAN

Diberikan seminear-ring kanselasi $(S, +, \cdot)$ dengan elemen identitas. Syarat cukup dan perlu seminear-ring S adalah seminear-ring komutatif yaitu

1. untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a^n \cdot b = a^{n-1} \cdot b \cdot a$, untuk suatu $n \geq 2$;
2. untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $a^n \cdot b = a \cdot b \cdot a^{n-1}$, untuk suatu $n \geq 2$;
3. untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $(a \cdot b) \cdot a = (b \cdot a) \cdot a$;
4. untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $(a \cdot b)^2 = b \cdot a^2 \cdot b$;
5. untuk setiap $a, b \in S$ berlaku $(a \cdot b)^2 = (b \cdot a)^2$.

REFERENSI

[1] Pilz Gunter, *Near-Rings*, revised edition. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1983.

[2] Hussain, F., Tahir, M, Abdullah, S., and Sadiq, N., “Quotients Seminear-rings,”Indian Journal of Science and Technology, no. 1-7, 2016.

[3] Rootselar, B. van and Hoorn, Willy G. van., “Fundamental Notions in The Theory of Seminear-rings,” *Compositio Mathematica*, vol. 18, no. 1-2, pp. 65-78, 1967.

[4] Ramachandram, “Coomutativity of Seminear-Rings,” *Journal of Science and Arts*, vol. 17, no. 4, pp. 367-368, 2011.

[5] Grillet, P.A., *Commutative Semigroups*, USA: Kluwer Academic Publishers, 2001.