JOMTA
Journal of Mathematics: Theory and Applications
Vol. 4, No. 2, 2022, P-ISSN 2685-9653 e-ISSN 2722-2705

Teorema Titik Tetap untuk Pemetaan Bernilai Himpunan pada Subset dari Ruang b-Metrik

Syamsuddin Mas'ud[1], Yusuf[2]
[1]Program Studi Matematika, Universitas Negeri Makassar, Indonesia
[2]Program Studi Matematika, Universitas Gadjah Mada, Indonesia
e-mail: [1]syamsuddinm@unm.ac.id

Abstrak. Tulisan ini membahas tentang teorema titik tetap untuk pemetaan bernilai himpunan dengan domain berupa subset dari suatu ruang b-metrik. Hasil yang diperoleh merupakan pengembangan tulisan Assad, N. A. dan Kirk, W. A yang berjudul *fixed point theorems for set-valued mappings of contractive type*, dengan mengganti ruang metrik menjadi ruang b-metrik.

Kata kunci: b-metrik, pemetaan bernilai himpuan, teorema titik tetap.

Abstract. *This paper study about fixed point theorem for set-valued maps where its domain is subset of a b-metric space. The result is improvement of Assad, N. A. and Kirk, W. A's paper, fixed point theorems for set-valued mappings of contractive type, by changing metric space to b-metric space.*

Keywords*: b-metric, set-valued maps, fixed point theorem.*

I. PENDAHULUAN

Teori titik tetap merupakan salah satu landasan di dalam pengembangan matematika karena mempunyai peran yang cukup mendasar dalam aplikasi berbagai cabang ilmu matematika. Salah satu teorema yang paling terkenal dalam teori titik tetap adalah prinsip kontraksi Banach pada ruang metrik. Dalam perkembengannya sendiri, konsep ruang *b*-metrik sebagai salah satu perumuman dari ruang metrik diperkenalkan oleh Bakhtin [1].

Selain pembahasan teori titik tetap untuk pemetaan biasa (pemetaan dengan domain dan kodomain yang sama), pembahasannyapun berkembang pada pemetaan yang bernilai himpunan. Seperti halnya yang dilakukan Nedler [2] dengan memperkenalkan perluasan prinsip kontraksi Banach untuk pemetaan bernilai himpunan dalam papernya yang berjudul *Multi-valued Contraction Mappings*. Karena itu, banyak penulis yang kemudian mengkaji dan mempelajari teori titik tetap untuk pemetaan bernilai himpunan. Salah satunya adalah Amini-Harandi [3] yang membuktikan teorema terkait pemetaan bernilai himpunan. Selanjutnya Aydi [4] menyatakan bahwa teori tentang pemetaan bernilai himpunan memiliki banyak aplikasi seperti dalam teori kontrol, optimisasi konveks, persamaan diferensial, dan dalam bidang ekonomi. Aydi [4] juga memperumum suatu teorema yang telah dibuktikan Amini-Harandi [3] dengan mengerjakan teorema itu pada ruang *b*-metrik

Meskipun telah banyak tulisan terkait teorema titik tetap untuk pemetaan bernilai himpunan pada ruang *b*-metrik, namun kebanyakan yang dikaji terkait pemetaan dengan domain berupa ruang *b*-metrik. Oleh karena itu, penulis tertarik untuk mengkaji teorema titik tetap bernilai himpunan untuk pemetaan dengan domain berupa subset dari ruang *b*-metrik. Kajian ini akan didasarkan pada penelitian yang telah dilakukan oleh Nadim A. Assad dan W. A. Kirk [5] yang telah mengkaji pemetaan serupa namun terbatas pada ruang metrik.

II. LANDASAN TEORI

Pemetaan bernilai himpunan yang dimaksud yaitu pemetaan dengan kodomain berupa koleksi subset dari suatu himpunan. Kemudian akan diberikan juga definisi titik tetap untuk pemetaan bernilai himpunan. Definisi titik tetap untuk pemetaan bernilai himpunan berikut ini diambil dari tulisan Aydi [4].

Definisi 1. Diberikan himpunan tak kosong X. Suatu $x \in X$ disebut sebagai titik tetap dari pemetaan bernilai himpunan $T: X \to 2^X$, jika $x \in T(x)$ dimana 2^X menyatakan koleksi dari semua subset tak kosong dari X.

Adapun Definisi ruang b-metrik yang merupakan perumuman dari ruang metrik diberikan oleh Czerwik [6] sebagai berikut.

Definisi 2. Diberikan himpunan tak kosong X dan $s \geq 1$. Pemetaan $b: X \times X \to \mathbb{R}$ disebut b-metrik dengan koefisien s, jika untuk setiap $x, y, z \in X$ memenuhi:
i. $b(x, y) \geq 0$

ii. $b(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
iii. $b(x,y) = b(y,x)$
iv. $b(x,z) \leq s[b(x,y) + b(y,z)]$
Himpunan X yang dilengkapi dengan b-metrik b dengan koefisien s dinamakan sebagai ruang b-metrik dan ditulis (X,b,s).

Dari definisi di atas, apabila $s = 1$ maka diperoleh b merupakan metrik. Karena itu, b-metrik merupakan perumuman dari metrik. Berikut ini akan diberikan contoh b-metrik yang bukan merupakan metrik.

Contoh 1. Pemetaan b:R × R → R dengan $b(x,y) = |x - y|^2$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ merupakan b-metrik dengan koefisien $s = 2$. Karena itu $(\mathbb{R}, b, 2)$ merupakan ruang b-metrik.

Selanjutnya akan diberikan definisi barisan konvergen, barisan Cauchy, dan himpunan tertutup dalam ruang b-metrik, serta ruang b-metrik lengkap. Konsep-konsep ini diambil dari tulisan Kumam and Sintunavarat [7].

Definisi 3. Diberikan ruang b-metrik (X,b,s) dan barisan (x_n) di X. Barisan (x_n) disebut:
i. Konvergen jika terdapat $x \in X$ sehingga untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq K$ berlaku $b(x_n, x) < \epsilon$. Dalam hal ini ditulis $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ atau $x_n \to x$.
ii. Cauchy jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $K \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq K$ berlaku $b(x_n, x_m) < \epsilon$.
Ruang b-metrik (X,b,s) selanjutnya disebut lengkap jika setiap barisan Cauchy di dalam X juga konvergen di X.

Teorema 1.[7] Dalam suatu ruang b-metrik (X,b,s) berlaku:
i. suatu barisan konvergen memiliki tepat satu limit;
ii. setiap barisan konvergen merupakan barisan Cauchy.

Selanjutnya, berikut ini diberikan definisi klosur dari suatu himpunan yang juga diambil dari tulisan Kumam and Sintunavarat [7] sekaligus digunakan dalam memperkenalkan konsep himpunan titik batas dari suatu himpunan.

Definisi 4. Diberikan ruang b-metrik (X,b,s) dan himpunan $Y \subseteq X$.
i. Klosur dari Y, ditulis $\bar{Y}$ dan didefinisikan sebagai
$$\bar{Y} = \{x \in X | \exists (x_n) \subseteq Y \text{ konvergen ke } x\}$$
ii. Himpunan titik batas dari Y, ditulis ∂Ydan didefinisikan sebagai
$$\partial Y = \bar{Y} \cap \overline{Y^c}$$

Berdasarkan konsep barisan konvergen yang sebelumnya juga, berikut ini diberikan konsep himpunan tertutup dan konsep himpunan terbatas dalam ruang b-metrik. Konsep ini diambil dari tulisan Bota et al [8].

Definisi 4. Diberikan ruang b-metrik (X,b,s) dan $Y \subseteq X$.
i. Himpunan Y dikatakan tertutup jika untuk setiap barisan konvergen (x_n) di Y maka $\lim_{n\to\infty} x_n \in Y$.
ii. Himpunan Y dikatakan terbatas jika terdapat $M > 0$ sehingga $b(x,y) < M$ untuk setiap $x, y \in Y$.

Selanjutnya, diperkenalkan dua notasi untuk mempermudah pembahasan lebih lanjut, yakni untuk suatu ruang b-metrik (X,b,s) dinotasikan
$$\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\} \text{ dan } CB(X) = \{Y \subseteq X | Y \text{ tak kosong, tertutup, dan terbatas}\}.$$
Beberapa konsep dasar terkait himpunan dalam suatu ruang b-metrik (X,b,s), yang diambil dari tulisan Czerwik [9] adalah sebagai berikut.

Definisi 5. Diberikan ruang b-metrik (X,b,s).
i. Pemetaan $D: CB(X) \times CB(X) \to \mathbb{R}^+$ didefinisikan sebagai
$$D(A,B) = \inf\{b(x,y) | x \in A, y \in B\},$$
untuk setiap $A, B \in CB(X)$.
Khususnya, jika $x_0 \in X$, maka $b(x_0, B) = D(\{x_0\}, B)$.
ii. Pemetaan $\rho: CB(X) \times CB(X) \to \mathbb{R}^+$ didefinisikan sebagai
$$\rho(A,B) = \sup\{b(a,B) | a \in A\},$$
untuk setiap $A, B \in CB(X)$.
iii. Pemetaan $H: CB(X) \times CB(X) \to \mathbb{R}^+$ didefinisikan sebagai
$$H(A,B) = \max\{\rho(A,B), \rho(B,A)\},$$
untuk setiap $A, B \in CB(X)$.

Dari definisi di atas dapat dilihat bahwa untuk setiap $A, B \in CB(X)$ berlaku bahwa
$$D(A,B) \leq \rho(A,B) \leq H(A,B),$$
sehingga diperoleh bahwa untuk setiap $x \in A$ berlaku
$$b(x,B) \leq \rho(A,B) \leq H(A,B).$$
Demikian pula jika $B \in CB(X)$, maka untuk setiap $x \in X$ dan $y \in B$ berlaku
$$b(x,B) \leq b(x,y).$$

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

Sebelum membahas hasil penelitian dalam tulisan ini, terlebih dahulu akan diberikan beberapa sifat dasar yang dibutuhkan. Sifat dasar ini diambil dari tulisan Aydi [4].

Lemma 1. Jika (X,b,s) ruang b-metrik, maka $b(x,A) \leq s[b(x,y) + b(y,A)]$ dan $b(x,A) \leq s[b(x,B) + H(B,A)]$ untuk setiap $x, y \in X$ dan $A, B \in CB(X)$.

Lemma 2. Diberikan ruang b-metrik (X,b,s). Jika $x \in X$ dan $A \in CB(X)$, maka

$$b(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A.$$

Lemma 3. Jika (X, b, s) ruang b-metrik dan $A, B \in CB(X)$, maka untuk setiap $\epsilon > 0$ dan $y \in B$, terdapat $a \in A$ sehingga $b(a, y) \leq H(A, B) + \epsilon$.

Hasil penelitian yang dimaksud disajikan dalam teorema berikut, yaitu teorema tentang eksistensi titik tetap untuk pemetaan bernilai himpunan dengan domain berupa himpunan bagian dari suatu ruang b-metrik.

Teorema 2. Diberikan ruang b-metrik lengkap (X, b, s), himpunan tertutup tak kosong $A \subseteq X$, dan pemetaan $T: A \to CB(X)$ dengan sifat

i. T pemetaan kontraktif yakni, terdapat bilangan real $k \geq 0$ sehingga $H(T(x), T(y)) \leq kb(x, y)$, untuk setiap $x, y \in A$;
ii. A konveks yakni, untuk setiap $x \in A$ dan $y \notin A$, terdapat $z \in \partial A$ sehingga
$$b(x, z) + b(z, y) = b(x, y);$$
iii. $T(x) \subseteq A$ untuk setiap $x \in \partial A$.

Jika $k < \frac{1}{s^3}$, maka T memiliki titik tetap.

Bukti. Diperhatikan bahwa $k < \frac{1}{s^3}$, maka terdapat $q \in \mathbb{R}$ dengan $k < q < \frac{1}{s^3}$. Akibatnya, untuk setiap $x, y \in A$ berlaku $H(T(x), T(y)) \leq kb(x, y) \leq qb(x, y)$.
Diambil sebarang $x_0 \in A$ dan $x'_1 \in T(x_0)$. Jika $x'_1 \in A$ maka dipilih $x_1 = x'_1$, tetapi jika $x'_1 \notin A$, maka dengan menggunakan sifat (ii), dipilih $x_1 \in \partial A$ sehingga
$$b(x_0, x_1) + b(x_1, x'_1) = b(x_0, x'_1).$$
Karena A tertutup maka $x_1 \in A$. Akibatnya, dengan menggunakan Lemma 2.3, diperoleh bahwa terdapat $x'_2 \in T(x_1)$ sehingga
$$b(x'_1, x'_2) \leq H(T(x_0), T(x_2)) + q.$$
Jika $x'_2 \in A$ maka dipilih $x_2 = x'_2$, tetapi jika $x'_2 \notin A$, maka dengan menggunakan sifat (ii), dipilih $x_2 \in \partial A$ sehingga
$$b(x_1, x_2) + b(x_2, x'_2) = b(x_1, x'_2).$$
Karena A tertutup maka $x_2 \in A$. Akibatnya, dengan menggunakan Lemma 2.3, diperoleh bahwa terdapat $x'_3 \in T(x_2)$ sehingga
$$b(x'_2, x'_3) \leq H(T(x_1), T(x_2)) + q^2.$$
Proses dilanjutkan terus menerus, diperoleh barisan (x_n) dan (x'_n) dengan sifat

(a) $x'_n \in T(x_{n-1})$;
(b) $b(x'_n, x'_{n+1}) \leq H(T(x_{n-1}), T(x_n)) + q^n$;

dengan

(c) $x_n = x'_n$ jika $x'_n \in A$ atau
(d) $b(x_{n-1}, x_n) + b(x_n, x'_n) = b(x_{n-1}, x'_n)$ jika $x'_n \notin A$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
Selanjutnya, dimisalkan $P = \{x_i \in (x_n) | x_i = x'_i, i \in \mathbb{N}\}$ dan $Q = \{x_i \in (x_n) | x_i \neq x'_i, i \in \mathbb{N}\}$.
Diperhatikan bahwa menurut konstruksi barisan (x_n), untuk setiap $n \in \mathbb{N}\}$ berlaku $x_n \in Q \Rightarrow x_{n+1} \in P$, sebab seandainya terdapat $n \in \mathbb{N}\}$sehingga $x_n \in Q$tetapi$x_{n+1} \in Q$, maka $x_n \in \partial A, x'_{n+1} \in T(x_n)$,dan$x'_{n+1} \notin A$, yang berarti $T(x_n) \nsubseteq A$. Hal ini kontradiksi dengan (iii).
Selanjutnya, untuk setiap $n \in \mathbb{N}\}$ dengan $n \geq 2$, diperhatikan 3 kasus berikut ini.

(1) Jika $x_n, x_{n+1} \in P$ maka dengan menggunakan (b) diperoleh
$$\begin{aligned} b(x_n, x_{n+1}) &= b(x'_n, x'_{n+1}) \\ &\leq H(T(x_{n-1}), T(x_n)) + q^n \leq qb(x_{n-1}, x_n) + q^n. \end{aligned}$$
(2) Jika $x_n \in P$dan$x_{n+1} \in Q$, maka dengan menggunakan (b) dan (d) diperoleh
$$\begin{aligned} b(x_n, x_{n+1}) &\leq b(x_n, x'_{n+1}) = b(x'_n, x'_{n+1}) \\ &\leq H(T(x_{n-1}), T(x_n)) + q^n \leq qb(x_{n-1}, x_n) + q^n. \end{aligned}$$
(3) Jika $x_n \in Q$dan$x_{n+1} \in P$, maka $x_{n-1} \in P$. Akibatnya, dengan menggunakan (b) dan (d) diperoleh
$$\begin{aligned} b(x_n, x_{n+1}) &\leq s[b(x_n, x'_n) + b(x'n, x_{n+1})] \\ &= s[b(x_n, x'_n) + b(x'n, x'_{n+1})] \\ &\leq s[b(x_n, x'_n) + H(T(x_{n-1}), T(x_n)) + q^n] \\ &\leq s[b(x_n, x'_n) + qb(x_{n-1}, x_n) + q^n] \\ &\leq s[b(x_{n-1}, x'_n) + q^n] \\ &\leq s[b(x'_{n-1}, x'_n) + q^n] \\ &\leq s[H(T(x_{n-2}), T(x_{n-1})) + q^{n-1} + q^n] \\ &\leq s[qb(x_{n-2}, x_{n-1}) + q^{n-1} + q^n]. \end{aligned}$$

Sedangkan untuk kemungkinan lain, yaitu $x_n, x_{n+1} \in Q$ tidak mungkin sebab kontradiksi dengan hasil sebelumnya. Oleh karena itu, untuk setiap $n \in \mathbb{N}\}$ dengan $n \geq 2$, berlaku
$$b(x_n, x_{n+1}) \leq qb(x_{n-1}, x_n) + q^n \text{ atau}$$
$$b(x_n, x_{n+1}) \leq s[qb(x_{n-2}, x_{n-1}) + q^{n-1} + q^n].$$
Selanjutnya, dimislkan
$$r = (sq)^{-\frac{1}{2}} \max\{b(x_0, x_1), b(x_1, x_2)\}.$$
Ditunjukkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}, b(x_n, x_{n+1}) \leq (sq)^{\frac{n}{2}}(r + n)$ dengan induksi sebagai berikut. Pada langkah dasar yakni n=1 ataupun n=2, jelas terpenuhi. Selanjutnya, andaikan untuk setiap $k \in \mathbb{N}$ dengan $1 \leq k \leq n$ benar bahwa
$$b(x_k, x_{k+1}) \leq (sq)^{\frac{k}{2}}(r + k),$$
akan ditunjukkan benar juga untuk $k = n + 1$dengan$n \geq 2$.

Jika $b(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq qb(x_n, x_{n+1}) + q^{n+1}$, maka diperoleh
$$\begin{aligned} b(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq q(sq)^{\frac{n}{2}}(r + n) + q^{n+1} \\ &= (sq)^{\frac{n+1}{2}}\left[q^{\frac{1}{2}}s^{-\frac{1}{2}}(r + n) + (sq)^{-\frac{n+1}{2}}q^{n+1}\right] \\ &\leq (sq)^{\frac{n+1}{2}}(r + n + 1). \end{aligned}$$
Sedangkan jika $b(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq s[qb(x_{n-1}, x_n) + q^n + q^{n+1}]$, maka diperoleh
$$\begin{aligned} b(x_{n+1}, x_{n+2}) &\leq s\left[q(sq)^{\frac{n-1}{2}}(r + n - 1) + q^n + q^{n+1}\right] \\ &= (sq)^{\frac{n+1}{2}}[(r + n - 1) + s(sq)^{-\frac{n+1}{2}}(q^n + q^{n+1})] \\ &\leq (sq)^{\frac{n+1}{2}}(r + n + 1). \end{aligned}$$
Akibatnya, dengan menggunakan hasil yang telah dibuktikan dengan induksi sebelumnya, diperoleh bahwa untuk setiap $n, i \in \mathbb{N}$ berlaku
$$\begin{aligned} b(x_n, x_{n+i}) &\leq s[b(x_n, x_{n+1}) + b(x_{n+1}, x_{n+i})] \\ &\leq \cdots \end{aligned}$$

$$\le sb(x_n, x_{n+1}) + s^{2b}(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + s^i b(x_{n+i-1}, x_{n+i})$$
$$\le s(sq)^{\frac{n}{2}}(r+n) + s^2(sq)^{\frac{n+1}{2}}(r+n+1) + \ldots + s^i(sq)^{\frac{n+i-1}{2}}(r+n+i-1)$$
$$\le s(sq)^{\frac{n}{2}}\left[(r+n)\sum_{k=0}^{i-1} s^k(sq)^{\frac{k}{2}} + \sum_{k=0}^{i-1} ks^k(sq)^{\frac{k}{2}}\right]$$
$$\le s(sq)^{\frac{n}{2}}\left[(r+n)\sum_{k=0}^{\infty}(s^3q)^{\frac{k}{2}} + \sum_{k=0}^{\infty} k(s^3q)^{\frac{k}{2}}\right]$$
$$\le rs(sq)^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(s^3q)^{\frac{k}{2}} + sn(sq)^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}(s^3q)^{\frac{k}{2}} + s(sq)^{\frac{n}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}k(s^3q)^{\frac{k}{2}}.$$

Ruas kanan ketaksamaan terakhir ini konvergen ke 0, sebab dengan uji rasio diperoleh bahwa $\sum_{k=0}^{\infty}(s^3q)^{\frac{k}{2}} < \infty$ dan $\sum_{k=0}^{\infty} k(s^3q)^{\frac{k}{2}} < \infty$ dan juga mengingat bahwa $k < q < \frac{1}{s^3}$ sehingga $(sq)^{\frac{1}{2}} < 1$ dan $(s^3q)^{\frac{1}{2}} < 1$, yang berarti $(sq)^{\frac{n}{2}} \to 0$ dan $n(sq)^{\frac{n}{2}} \to 0$. Karena itu, barisan (x_n) merupakan barisan Cauchy. Karena (X, b, s) ruang b-metrik lengkap, maka terdapat $x \in X$ sehingga $x_n \to x$. Lebih lanjut, karena A tertutup, maka $x \in A$. Dilain pihak, menurut konstruksi barisan (x_n), terdapat subbarisan (x_{n_k}) dari (x_n) dengan sifat $x_{n_k} = x'_{n_k}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, dengan menggunakan Lemma 2.1 diperoleh

$$b(x, T(x)) = \lim_{k\to\infty} b(x, T(x))$$
$$\le \lim_{k\to\infty} s[b(x, T(x_{n_k-1})) + H(T(x_{n_k-1}), T(x))]$$
$$\le \lim_{k\to\infty} s[b(x, x_{n_k}) + qb(x_{n_k-1}, x)] = 0.$$

Jadi menurut Lemma 2.2, diperoleh $x \in T(x)$ atau T memiliki titik tetap.

Berikut ini diberikan suatu akibat dari teorema di atas, dimana akibat ini merupakan Teorema yang ditemukan oleh Assad, N. A. dan Kirk, W. A [5].

Akibat 1. Diberikan ruang metrik lengkap (X, d), himpunan tertutup tak kosong $A \subseteq X$, dan pemetaan $T: A \to CB(X)$ dengan sifat

i. terdapat bilangan real $k \ge 0$ sehingga $H(T(x), T(y)) \le kd(x, y)$, untuk setiap $x, y \in A$;

ii. untuk setiap $x \in A$ dan $y \notin A$, terdapat $z \in \partial A$ sehingga
$$d(x, z) + d(z, y) = d(x, y);$$

iii. $T(x) \subseteq A$ untuk setiap $x \in \partial A$.

Jika $k < 1$, maka T memiliki titik tetap.

Bukti. Karena ruang b-metrik merupakan perumuman dari ruang metrik, yakni ketika diambil $s = 1$, maka bukti pernyataan ini jelas.

IV. KESIMPULAN

Teorema titik tetap untuk pemetaan bernilai himpunan pada suatu subset dari ruang b-metrik dapat dijamin keberadaannya dengan beberapa kondisi. Kondisi-kondisi yang dimaksud diantaranya: pemetaannya merupakan pemetaan kontraktif, domain pemetaannya tertutup dan merupakan himpunan konveks, setiap nilai pemetaannya merupakan subset domainnya, dan dengan membatasi konstanta kontraksinya. Pembatasan yang dimaksud yakni dengan mengambil konstanta kontraksi $k < \frac{1}{s^3}$.

Pada tulisan ini telah dikaji teorema titik tetap untuk pemetaan dengan domain merupakan subset dari suatu ruang b-metrik. Penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan bekerja pada ruang yang berbeda ataupun dengan bekerja pada pemetaan yang berbeda.

REFERENSI

[1] Bakhtin, I. A., “The Contraction Mapping Principle in Quasimetric Spaces”, *Functional Analysis*, vol. 30, pp. 26-37, 1989.

[2] Nadler, S. B., “Multi-valued Contraction Mappings”, *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 2, No. 30, pp. 475-488, 1989.

[3] Amini-Harandi, A., “Fixed Point Theory for Set-Valued Quasi-Contraction Maps in Metric Spaces”, *Applied Mathematics Letters*, vol. 24, pp. 1791-1794, 2011.

[4] Aydi, H., Bota, M. F., Karapinar, E. dan Mitrovic, S., “A Fixed Point theorem for set-valued quasi-contractions in b-Metric Spaces”, *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 88, pp. 1-8, 2012.

[5] Assad, N. A. dan Kirk, W. A., “Fixed Point Theorems for Set-Valued Mappings of Contractive Type”, *Pacific Journal of Mathematics*, vol. 43, no. 3, pp. 553 – 562, 1972.

[6] Czerwik, S., “Contraction Mappings in b-Metric Spaces”, *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, vol. 1, no. 1, pp. 5-11, 1993.

[7] Kumam, P., dan Sintunavarat, W., “The Existence of Fixed Point Theorems for Partial q-Set-Valued Quasi-Contractions in b-Metric Spaces and Related Results”, *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 226, pp. 1-20, 2014.

[8] Bota, M. F., Guran, L., dan Petrusel, A., “New Fixed Point Theorems on b-Metric Spaces with Applications to Coupled Fxed Point Theory”, *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, vol. 22, no. 74, pp. 1-14, 2020.

[9] Czerwik, S., “Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces”, *Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, vol. 46, no. 2, pp. 263-276, 1998.