JOMTA
Journal of Mathematics: Theory and Applications
Vol. 5, No. 2, 2023, P-ISSN: 2685-9653 e-ISSN: 2722-2705
DOI: 10.31605/jomta.v5i2.2876

Penyelesaian Sistem Persamaan *Fully Fuzzy* Non Linear Menggunakan Metode Newton Raphson Ganda

Eka Anisa[1] , **La Zakaria**[2,*], **Dorrah Azis**[3]
[1,2,3] Jurusan Matematika FMIPA, Universitas Lampung
[*]email: lazakaria.1969@fmipa.unila.ac.id

Abstrak. Terdapat banyak permasalahan dunia nyata yang diupayakan penyelesaiannya menggunakan sistem persamaan yang melibatkan himpunan bilangan *fuzzy*. Sistem persamaan fuzzy non linear dikembangkan menjadi sistem persamaan fully fuzzy nonlinear dengan mengimplementasikan operasi aritmatika bilangan fuzzy. Artikel ini bertujuan mendeskripsikan penyelesaian sistem persamaan *fully fuzzy* non linear yang melibatkan bilangan segitiga *fuzzy* dengan menggunakan alat bantu komputasi (algoritma dan pemrograman) dengan melibatkan metode Newton Raphson Ganda yang telah diformulasikan oleh Devitriani dkk. [1]. Teknis mendapatkan solusi menggunakan metode ini dapat dicapai dengan terlebih dahulu melakukan transformasi sistem persamaan *fuzzy* ke dalam sistem persamaan nonlinear dengan bilangan tegas menggunakan operasi aritmatika bilangan *fuzzy* segitiga. Komputasi penentuan solusi didasari pada sebuah algoritma yang implementasinya ke dalam program Matlab. Algoritma dan program Matlab yang dibuat memperlihatkan bahwa Newton Raphson Ganda dapat menyelesaikan sistem persamaan *fully fuzzy* non linear dengan efesien dalam waktu dan akurat dalam nilai hampiran solusi.

Kata kunci: Sistem Persamaan Nonlinear Fuzzy Penuh, Metode Newton Raphson Ganda, Bilangan Fuzzy Segitiga

Abstract. *Many real-world problems can be solved using a system of equations involving a set of fuzzy numbers. The system of nonlinear fuzzy equations is developed into a fully fuzzy nonlinear equations system by implementing arithmetic operations on fuzzy numbers. This article aims to describe the solution of a system of fully fuzzy nonlinear equations involving fuzzy triangular numbers using computational tools (algorithms and programming) involving the Double Newton Raphson method (formulated by Devitriani et.al* [1] . *Technically obtaining a solution using this method can be achieved by first transforming a system of fuzzy equations into a nonlinear equation with strict numbers using triangular fuzzy number arithmetic operations. The computational solution determination is based on an algorithm that is implemented in the Matlab program. The Matlab algorithm and program show that Double Newton Raphson can solve nonlinear systems of fully fuzzy equations efficiently in time and accurately in the solution's approximation value.*

Keywords*: nonlinear fully fuzzy equation system, double newton raphson method, triangel fuzzy number*

I. PENDAHULUAN

Sejak dimulainya setengah abad yang lalu, teori himpunan fuzzy telah berkembang dalam banyak disiplin ilmu. Aplikasi teori ini dapat dijumpai pada bidang ilmu kecerdasan buatan, ilmu komputer, teknik kontrol, teori keputusan, sistem pakar, logika, ilmu manajemen, riset operasi, pengenalan pola, dan robotika. Kemajuan teoretis telah dibuat dalam berbagai arah. [2]. Terdapat banyak permasalahan dunia nyata yang diupayakan penyelesaiannya menggunakan sistem persamaan yang melibatkan himpunan bilangan *fuzzy* ([3]–[8]). Sistem persamaan linear atau nonlinear selain dijumpai dalam himpunan bilangan tegas (*crispy*) kini dapat dijumpai dalam himpunan bilangan *fuzzy*. Untuk model persamaan nonlinear *fuzzy*, saat ini dapat dijumpai dalam berbagai pengembangan teori dan terapan matematika [9]–[13].

Umumnya persamaan atau sistem persamaan non linear dapat diselesaikan dengan menggunakan pendekatan hampiran (pendekatan numerik), misalnya metode Newton Raphson Ganda [1]. Pada tahun 2019, Jafarian & Jafari memperkenalkan sebuah metode baru untuk mendapatkan solusi optimal bilangan *fuzzy* non negatif dari sistem persamaan matriks *fully fuzzy* non linear $\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{C}\tilde{X}^2 + \cdots + \tilde{E}\tilde{X}^n = \tilde{b}$, dengan cara menambahkan variabel baru lalu membuat kendala persamaan [14]. Untuk metode numerik lainnya dapat dijumpai pada artikel [13], [15]–[18]. Sungguhpun terdapat sejumlah metode numerik untuk menyelesaikan permasalahan sebuah sistem persamaan *fully fuzzy* non linear (misalnya metode pempartisian blok matriks [19], metode dekomposisi Cholesky[20], metode dekomposisi LU[21], dan metode Broyden[22]), namun pada artikel ini digunakan metode Newton Raphson Ganda [1]. Metode ini memberikan keunggulan pada sisi tingkat konvergensi relatif tinggi (tingkat empat) yang berarti proses penentuan nilai akar lebih cepat dua kali dengan metode Newton-Raphson Standar.

II. LANDASAN TEORI

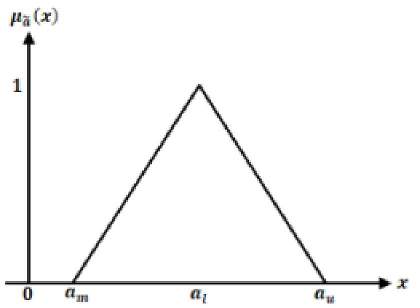
2.1 Teori Himpunan Fuzzy

Definisi 1. Bilangan *fuzzy*
Bilangan *fuzzy* merupakan himpunan *fuzzy* dimana $\tilde{u}: \mathbb{R}^1 \rightarrow I = [0,1]$ yang memenuhi syarat [14]:

1. $\tilde{u}$ semikontinu atas
2. $\tilde{u}(x) = 0$ di luar interval $[a, d]$
3. Ada bilangan real b dan c , $a \leq b \leq c \leq d$ dimana
   (i) $\tilde{u}(x)$ monoton naik pada$[a, b]$
   (ii) $\tilde{u}(x)$ monoton turun pda $[c, d]$
   (iii) $\tilde{u}(x) = 1$, untuk $b \leq x \leq c$

Definisi 2. Bilangan *fuzzy* segitiga.
Misalkan diberikan sembarang bilangan *fuzzy* $\tilde{a} = (m - \alpha, m, m + \beta) = (a_m, a_l, a_u)$ dengan fungsi keanggotaan sebagai berikut

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x - m}{\alpha} + 1, & m - \alpha \leq x \leq m, \quad \alpha > 0 \\ \dfrac{m - x}{\beta} + 1, & m \leq x \leq m + \beta, \quad \beta > 0 \\ 0, & lainnya \end{cases}$$



Gambar 1. Bilangan *Fuzzy* Segitiga $\tilde{a} = (a_m, a_l, a_u)$

Definisi 3. Operasi pada bilangan *fuzzy*.
Diberikan dua bilangan *fuzzy* segitiga $\tilde{a} = (a_m, a_l, a_u)$ dan $\tilde{b} = (b_m, b_l, b_u)$ maka operasi perhitungannya sebagai berikut [14]:

a. $\tilde{a} \oplus \tilde{b} = (a_m + b_m, a_l + b_l, a_u + b_u)$,
b. $-\tilde{a} = (-a_u, -a_l, -a_m)$,
c. $\tilde{a} \ominus \tilde{b} = (a_m - b_u, a_l - b_l, a_u - b_m)$,
d. Perkalian pada bilangan *fuzzy* dilambangkan oleh $\circledast$ dan didasarkan pada prinsip tambahan akan tetapi sedikit berbeda dari perkalian *fuzzy* klasik

$$\tilde{a} \circledast \tilde{b} = (c_m, c_l, c_u)$$

dimana $c_l = a_l \cdot b_l$
$c_m = \min(a_m \cdot b_m, a_m \cdot b_u, a_u \cdot b_m, a_u \cdot b_u)$
$c_u = \max(a_m \cdot b_m, a_m \cdot b_u, a_u \cdot b_m, a_u \cdot b_u)$
Jika $\tilde{a}$ adalah sembarang bilangan fuzzy segitiga dan $\tilde{b}$ non negatif, maka:

$$\tilde{a} \circledast \tilde{b} = \begin{cases} (a_m \cdot b_m, a_l \cdot b_l, a_u \cdot b_u), & a_m \geq 0, \\ (a_m \cdot b_u, a_l \cdot b_l, a_u \cdot b_u), & a_m < 0, a_u \geq 0, \\ (a_m \cdot b_m, a_l \cdot b_l, a_u \cdot b_m), & a_m < 0, a_u < 0. \end{cases}$$

Definisi 4. Matriks *fuzzy*
Matriks $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ disebut matriks *fuzzy* jika setiap anggota $\tilde{A}$ adalah bilangan *fuzzy*. Matriks *fuzzy* $\tilde{A}$ bernilai positif ($\tilde{A} > 0$), jika setiap anggota $\tilde{A}$ positif . Matriks *fuzzy* $n \times n \tilde{A} = (a_{ij})_{n \times n}$, yang mana $\tilde{a}_{ij} = (\tilde{a}_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij})$, dengan notasi baru $\tilde{A} = (A, M, N)$ dimana $A = (a_{ij})_{n \times n}, M = (m_{ij})_{n \times n}$ dan $N = (n_{ij})_{n \times n}$ adalah matriks tegas [3].

2.2 Sistem Persamaan Fully Fuzzy Non Linear

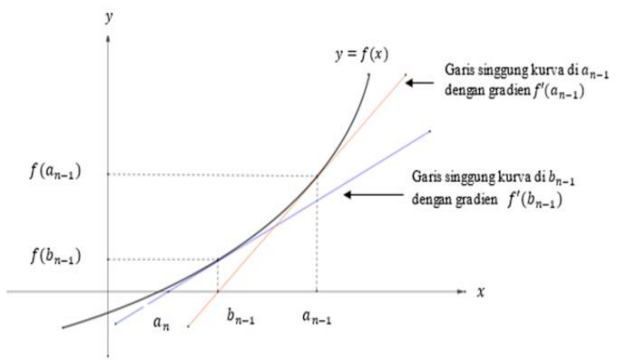
Sistem persamaan *fully fuzzy* nonlinear mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$\begin{cases} (\tilde{a}_{11} * \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{12} * \tilde{x}_1) \oplus \cdots \oplus (\tilde{a}_{1n} * \tilde{x}_n) \oplus \\ (\tilde{c}_{11} * \tilde{x}_1^2) \oplus (\tilde{c}_{12} * \tilde{x}_2^2) \oplus \cdots \oplus (\tilde{c}_{1n} * \tilde{x}_n^2) \oplus \cdots \\ (\tilde{e}_{11} * \tilde{x}_1^2) \oplus (\tilde{e}_{12} * \tilde{x}_2^2) \oplus \cdots \oplus (\tilde{e}_{1n} * \tilde{x}_n^2) = \tilde{b}_1 \\ \vdots \\ (\tilde{a}_{n1} * \tilde{x}_1) \oplus (\tilde{a}_{n2} * \tilde{x}_1) \oplus \cdots \oplus (\tilde{a}_{nn} * \tilde{x}_n) \oplus \\ (\tilde{c}_{n1} * \tilde{x}_1^2) \oplus (\tilde{c}_{n2} * \tilde{x}_2^2) \oplus \cdots \oplus (\tilde{c}_{nn} * \tilde{x}_n^2) \oplus \cdots \\ (\tilde{e}_{n1} * \tilde{x}_1^2) \oplus (\tilde{e}_{n2} * \tilde{x}_2^2) \oplus \cdots \oplus (\tilde{e}_{nn} * \tilde{x}_n^2) = \tilde{b}_n \end{cases} \tag{2}$$

dimana $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{c}_{ij}$, dan $\tilde{e}_{ij}$ untuk $1 \leq i, j \leq n$ adalah sembarang bilangan *fuzzy* segitiga, sedangkan $\tilde{b}_i$ pada ruas kanan dan elemen tidak diketahui $\tilde{x}_j$ adalah bilangan *fuzzy* non negatif [14].

2.3 Metode Newton Raphson Ganda

Menurut [1], Metode Newton Raphson Ganda merupakan salah satu metode iterasi yang digunakan untuk menentukan akar-akar persamaan non linear dengan orde konvergensi empat. Untuk menurunkan metode Newton Raphson Ganda digunakan pendekatan secara geometri yang dapat dilihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Tafsiran Geometri Metode Newton Raphson Ganda

Berdasarkan Gambar 2, garis singgung kurva di a_{n-1} dengan gradien garis singgungnya adalah

$$f'(a_{n-1}) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a_{n-1}) - 0}{a_{n-1} - b_{n-1}} \tag{3}$$

atau

$$f'(a_{n-1}) = \frac{f(a_{n-1})}{a_{n-1} - b_{n-1}}$$

sedangkan untuk garis singgung kurva di b_{n-1}, dengan gradien garis singgungnya adalah

$$f'(b_{n-1}) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b_{n-1}) - 0}{b_{n-1} - a_n}$$

atau

$$f'(b_{n-1}) = \frac{f(b_{n-1})}{b_{n-1} - a_n} \quad (4)$$

Berdasarkan persamaan (3) dan (4) maka diperoleh rumus metode Newton Raphson Ganda sebagai berikut:

$$b_{n-1} = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}, \quad f'(a_{n-1}) \neq 0 \quad (5)$$
$$a_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})}, \quad f'(b_{n-1}) \neq 0$$

Pada persamaan nonlinear $f(x) = 0$, metode Newton Raphson memerlukan turunan fungsi $f(x)$ yaitu $f'(x)$ untuk setiap iterasinya. Sedangkan untuk menyelesaikan persoalan persamaan yang lebih dari satu atau sistem persamaan non linear $F(x) = 0$ metode Newton Raphson memerlukan matriks Jacobian $J(x)$ untuk setiap iterasinya. Matriks Jacobian tersebut digunakan sebagai pengganti turunan fungsi $F(x)$ atau dalam matematika ditulis $F'(x)$, dengan syarat matriks $J(x)$ non singular. Formula metode Newton Raphson untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear sebagai berikut:

$$X_n = X_{n-1} - J^{-1}(X_{n-1})F(X_{n-1})$$

Berdasarkan persamaan (5) diperoleh rumus metode Newton Raphson Ganda untuk menyelesaikan sistem persamaan non linear sebagai berikut:

$$B_{n-1} = A_{n-1} - J^{-1}(A_{n-1})F(A_{n-1}) \quad (6)$$
$$A_n = B_{n-1} - J^{-1}(B_{n-1})F(B_{n-1}).$$

.

III. METODE

Studi literatur dan simulasi numerik dilakukan untuk mendapatkan solusi sistem persamaan nonlinear *fully fuzzy*. Solusi yang dihasilkan dari simulasi numerik diperoleh dengan cara memformulasikan sistem persamaan nonlinear *fuzzy* yang melibatkan bilangan *fuzzy* segitiga sedemikian sehingga solusi sistem persamaan tersebut diperoleh dengan efesien dan efektif. Sistematika penyelesaian sistem persamaan *non linear fully fuzzy* dengan Metode newton-Raphson Ganda adalah sebagai berikut:

1. Pandang sistem persamaan nonlinear $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{k-1}) = \mathbf{b}$ dengan nilai awal $\mathbf{x}_0 = \{x_{1,0}, x_{2,0}, x_{3,0}, \cdots, x_{n,0}\}^T$ dan galat $\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \{\varepsilon_{1,0}, \varepsilon_{2,0}, \varepsilon_{3,0}, \cdots, \varepsilon_{n,0}\}^T$, dan iterasi sebanyak k kali.
2. Gunakan matriks Jacobian untuk verifikasi nilai awal memenuhi kriteria pemakaian metode yakni $|\mathbf{J}(\mathbf{x}_0)| \neq 0$.
3. Hitung invers matriks Jacobian $\mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_{k-1})$ dan nilai fungsi $\mathbf{F}(\mathbf{x}_{k-1})$
4. Hitung $\mathbf{x}_{k-1} - \mathbf{J}^{-1}(\mathbf{x}_{k-1})\mathbf{F}(\mathbf{x}_{k-1})$ dan misalkan hasilnya dengan $\mathbf{Z}_{k-1}$
5. Ulangi langkah 2 hingga ke 4 dengan mengganti $\mathbf{X}_{k-1}$ dengan $\mathbf{Z}_{k-1}$ dan menamakannya dengan $\mathbf{X}_k$. Pengulangan ini berhenti ketika dicapai kondisi $|\mathbf{X}_k - \mathbf{X}_{k-1}| < \boldsymbol{\varepsilon}$
6. Selesai

IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dideskripsikan penggunaan metode Newton Raphson Ganda untuk penyelesaian sistem persamaan *fully fuzzy*. Agar bisa digunakan metode tersebut, sistem persamaan *fully fuzzy* nonlinear diubah ke dalam bentuk sistem persamaan tegas nonlinear dengan melibatkan operasi aritmatika bilangan *fuzzy* segitiga. Algoritma 1 merupakan algoritma deskriptif untuk mendapatkan solusi sistem persamaan nonlinear *fully fuzzy* menggunakan metode Newton Raphson Ganda:

Algoritma 1.

1. Input:
   Nilai awal $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ dan toleransi
   Inisialisasi iterasi (k) dan galat
2. Perhitungan inti:
   Ketika galat ≥ toleransi
   Untuk $k = 1,2,3, \dots, n$
   1) Periksa apakah $det(J(x_{k-1})) \neq 0$. Jika iya, lanjutkan perhitungan berikutnya. Jika tidak, ubah nilai awalnya.
   2) Hitung invers matriks Jacobian $J^{-1}(x_{k-1})$ dan nilai fungsi $F(x_{k-1})$
   3) Hitung $Z_{k-1} = x_{k-1} - J^{-1}(x_{k-1})F(x_{k-1})$
   4) Hitung matriks Jacobian $J(Z_{k-1})$ dan nilai fungsi $F(Z_{k-1})$
   5) Cek apakah $det(J(Z)) \neq 0$. Jika iya, lanjutkan perhitungan berikutnya. Jika tidak, ubah nilai awal x_0.
   6) Hitung invers matriks Jacobian $J^{-1}(Z_{k-1})$
   7) Hitung nilai hampiran baru dengan formula
   $$x_k = Z_{k-1} - J^{-1}(Z_{k-1})F(Z_{k-1})$$
   8) Hitung $galat = \|x_k - x_{k-1}\|$
   9) Perbaharui iterasi
   10) Selesai
3. Input: matriks fungsi $F(x)$ dan matriks Jacobian $J(x)$ dari sistem persamaan non linear yang akan diselesaikan.
4. Output: solusi hampiran $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$

Dari algoritma tersebut dapat dibuat diagram alir atau *flowchart* untuk mempermudah dalam pembuatan program komputer. Adapun diagram alirnya ditampilkan pada Gambar 3.

Contoh

Tentukan penyelesaian sistem persamaan *fully fuzzy* nonlinear berikut

$$\begin{cases} (2,3,5) \hat{*} \tilde{x} \oplus (2,4,5) \hat{*} \tilde{y} \oplus \\ (1,2,3) \hat{*} \tilde{x}^2 \oplus (3,5,6) \hat{*} \tilde{y}^2 = (19,140,467) \\ (1,2,3) \hat{*} \tilde{x} \oplus (3,4,6) \hat{*} \tilde{y} \oplus \\ (3,4,5) \hat{*} \tilde{x}^2 \oplus (1,3,4) \hat{*} \tilde{y}^2 = (14,136,436) \end{cases} \quad (7)$$

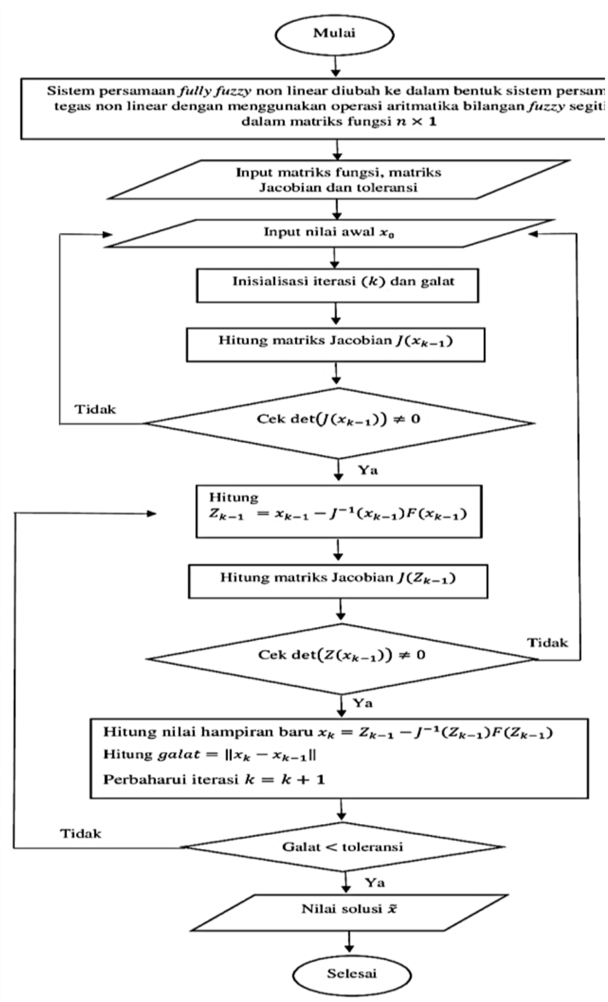
dengan $\tilde{x}$ dan $\tilde{y}$ masing-masing merupakan dua bilangan *fuzzy* segitiga (x_1, x_2, x_3) dan (y_1, y_2, y_3).

Penyelesaian:
Karena $\tilde{x}$ dan $\tilde{y}$ merupakan dua bilangan *fuzzy* segitiga yang beranggota (x_1, x_2, x_3) dan (y_1, y_2, y_3) maka sistem persamaan *fully fuzzy* nonlinear pada persamaan (7) dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$\begin{cases} (2,3,5)\widehat{*}(x_1,x_2,x_3)\oplus(2,4,5)\widehat{*}(y_1,y_2,y_3)\oplus \\ (1,2,3)\widehat{*}(x_1^2,x_2^2,x_3^2)\oplus(3,5,6)\widehat{*}(y_1^2,y_2^2,y_3^2)= \\ (19,140,467) \\ (1,2,3)\widehat{*}(x_1,x_2,x_3)\oplus(3,4,6)\widehat{*}(y_1,y_2,y_3)\oplus \\ (3,4,5)\widehat{*}(x_1^2,x_2^2,x_3^2)\oplus(1,3,4)\widehat{*}(y_1^2,y_2^2,y_3^2)= \\ (14,136,436) \end{cases} \tag{8}$$

Kemudian, pilih sebarang nilai awal $\mathbf{x}_0$ dan $\mathbf{y}_0$, misalnya $\tilde{x}_0=(x_{10},x_{20},x_{30})=\tilde{y}_0=(y_{10},y_{20},y_{30})=(1,2,3)$. Dan juga toleransi Tol $\boldsymbol{\varepsilon}_0=10^{-2}$. Pilihan ini hanya untuk komputasi sederhana dan dapat diganti dengan nilai awal lainnya, jika diperlukan.

Sistem persamaan *fully fuzzy* nonlinear (8) diubah terlebih dahulu ke dalam bentuk sistem persamaan tegas nonlinear dengan menerapkan operasi aritmatika pada bilangan *fuzzy* segitiga.



Gambar 3. Diagram Alir Metode Newton Raphson Ganda

Sehingga sistem persamaan baru dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\begin{cases} 2x_1+2y_1+x_1^2+3y_1^2=19 \\ 3x_2+4y_2+2x_2^2+5y_2^2=140 \\ 5x_3+5y_3+3x_3^2+6y_3^2=467 \\ x_1+3y_1+3x_1^2+y_1^2=14 \\ 2x_2+4y_2+4x_2^2+3y_2^2=136 \\ 3x_3+6y_3+5x_3^2+4y_3^2=436 \end{cases} \tag{9}$$

Selanjutnya sistem persamaan nonlinear (9) diselesaikan dengan menggunakan program Matlab yang dikonstruksi berdasarkan algoritma yang diberikan dalam Gambar 3. Hasil komputasi memberikan informasi solusi sistem persamann (8) sebagamana diberikan dalam Tabel 1. Tabel ini menunjukan bahwa pada iterasi ke-3 proses komputasi dihentikan ketika nilai-nilai solusi $\tilde{x}=(x_1,x_2,x_3)=(1,4,6)$ dan $\tilde{y}=(y_1,y_2,y_3)=(2,4,7)$ untuk nilai galat 0.000000202.

Tabel 1. Solusi Penyelesaian Sistem Persamaan *Fully Fuzzy* Nonlinear

No	$\tilde{x}$	$\tilde{y}$	*Galat*
1	$x_1=1.00000000$ $x_2=2.00000000$ $x_3=3.00000000$	$y_1=1.00000000$ $y_2=2.00000000$ $y_3=3.00000000$	1.000000000
2	$x_1=1.00069074$ $x_2=4.07482494$ $x_3=6.07924883$	$y_1=2.04183935$ $y_2=4.05379014$ $y_3=7.28364291$	6.1188031655
3	$x_1=1.00000000$ $x_2=4.00000005$ $x_3=5.99999985$	$y_1=2.00000004$ $y_2=4.00000001$ $y_3=7.00000201$	0.3114092308
4	$x_1=1.00000000$ $x_2=4.00000000$ $x_3=6.00000000$	$y_1=2.00000000$ $y_2=4.00000000$ $y_3=7.00000000$	0.0000020198

Dapat dicatat bahwa implemetasi *flowchart* pada Gambar 3 dalam bentuk program Matlab memberikan informasi bahwa terhadap kasus yang dibahas (persamaan (7)) diperlukan iterasi sebanyak 3 kali untuk mencapai solusi optimal yang diharapkan. Dengan program yang sama terhadap kasus persamaan (7), untuk pemakaian tiga nilai awal berbeda dan tiap nilai awal menggunakan dua batas toleransi berbeda, hasil komputasi yang diperoleh sebagaimana ditampilkan pada Tabel 2. Berdasarkan data/informasi dari Tabel 2 dapat diketahui bahwa sistem persamaan *fully fuzzy* nonlinear (7) untuk pemakaian tiga nilai awal dan dua batas toleransi yang berbeda diperoleh nilai-nilai solusi sama untuk jumlah iterasi bervariasi dari 2 hingga 4 iterasi.

Tabel 2. Perbandingan Hasil Komputasi Penggunaan Metode Newton Raphson Ganda untuk Penentuan Solusi Sistem Persamaan (7) dengan Tiga Nilai Awal Berbeda.

No	Nilai Awal	Solusi	Tol	n	Galat
1.	$\tilde{x}_0 = (1{,}2{,}3)$	$\tilde{x} = (1{,}4{,}6)$	10^{-2}	3	2.019×10^{-6}
	$\tilde{y}_0 = (1{,}2{,}3)$	$\tilde{y} = (2{,}4{,}7)$	10^{-8}	4	1.3×10^{-15}
2.	$\tilde{x}_0 = (1{,}3{,}5)$	$\tilde{x} = (1{,}4{,}6)$	10^{-2}	2	3.38×10^{-3}
	$\tilde{y}_0 = (2{,}4{,}6)$	$\tilde{y} = (2{,}4{,}7)$	10^{-8}	3	2.24×10^{-13}
3.	$\tilde{x}_0 = (6{,}7{,}8)$	$\tilde{x} = (1{,}4{,}6)$	10^{-2}	3	4.72×10^{-3}
	$\tilde{y}_0 = (7{,}8{,}9)$	$\tilde{y} = (2{,}4{,}7)$	10^{-8}	4	5.89×10^{-11}

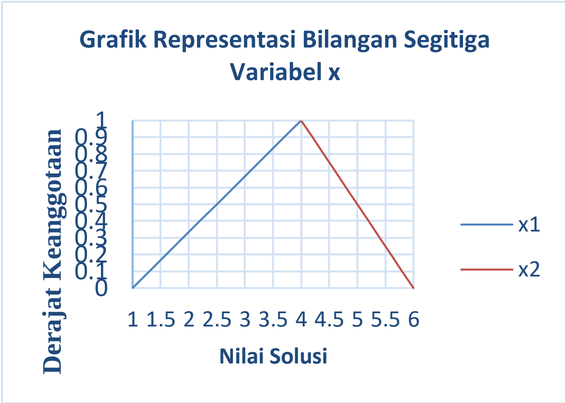
Hasil-hasil yang diperoleh dari metode numerik yang digunakan, metode Newton-Raphson Ganda (6) terhadap penyelesaian sistem persamaan nonlinear *fully fuzzy* (7) sebagaimana diberikan dalam Tabel 1 dan Tabel 2, dapat dikembangkan untuk diketahui batas-batas interval fungsi linear yang monoton naik atau turun melalui fungsi keanggotaan bilangan segitiga *fuzzy* dan derajat keanggotaannya pada interval $0 \leq \mu \leq 1$. Hasil komputasi untuk keperluan ini diberikan dalam Tabel 3.

Tabel 3. Fungsi Keanggotaan Nilai Solusi dengan Derajat Keanggotaan $0 \leq \mu \leq 1$

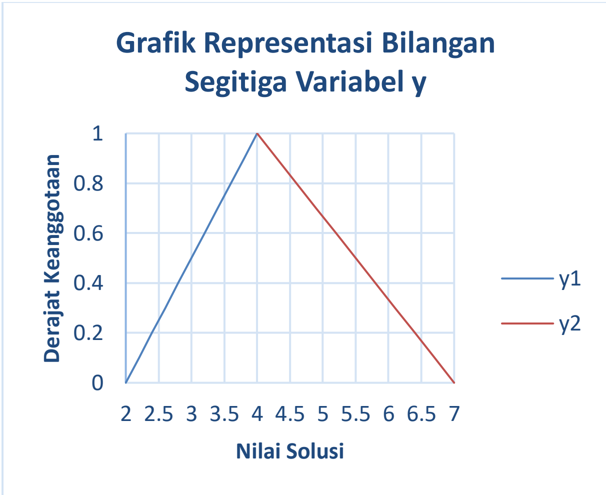
Derajat Keanggotaan(μ)	$x(\mu)$		$y(\mu)$	
	$\underline{x}(\mu)$	$\overline{x}(\mu)$	$\underline{y}(\mu)$	$\overline{y}(\mu)$
0	1.0	6.0	2.0	7.0
0.1	1.3	5.8	2.2	6.7
0.2	1.6	5.6	2.4	6.4
0.3	1.9	5.4	2.6	6.1
0.4	2.2	5.2	2.8	5.8
0.5	2.5	5.0	3.0	5.5
0.6	2.8	4.8	3.2	5.2
0.7	3.1	4.6	3.4	4.9
0.8	3.4	4.4	3.6	4.6
0.9	3.7	4.2	3.8	4.3
1	4.0	4.0	4.0	4.0

Nilai-nilai fungsi dalam Tabel 3 direpresentasikan ke dalam bentuk grafik fungsi sebagaimana diberikan dalam Gambar 4 dan Gambar 5.

Pada Gambar 4, x_1 menunjukkan $\underline{x}(\mu)$ yang merupakan fungsi kontinu kiri, monoton naik, dan terbatas, x_2 menunjukkan $\overline{x}(\mu)$ yang merupakan fungsi kontinu kiri, monoton turun, dan terbatas. Gambar 4 memperlihatkan grafik himpunan *fuzzy* normal dan konvek karena mempunyai tinggi sama dengan 1 dan fungsi keanggotaannya monoton naik dan monoton turun. Solusi untuk variabel $\tilde{x}$ mempunyai nilai minimum 1, rata-rata 4, dan nilai maksimum 6.



Gambar 4. Grafik Representasi Bilangan *Fuzzy* Segitiga untuk Variabel x pada Contoh 1



Gambar 5. Grafik Representasi Bilangan *Fuzzy* Segitiga untuk Variabel y pada Contoh 1

Pada Gambar 5, y_1 menunjukkan $\underline{y}(\mu)$ yang merupakan fungsi kontinu kiri, monoton naik, dan terbatas dan y_2 menunjukkan $\overline{y}(\mu)$ yang merupakan fungsi kontinu kiri, monoton turun, dan terbatas. Gambar 5, memperlihatkan grafik himpunan *fuzzy* normal dan konvek karena mempunyai tinggi sama dengan 1 dan fungsi keanggotaannya monoton naik dan monoton turun. Solusi untuk variabel $\tilde{y}$ mempunyai nilai minimum 2, rata-rata 4, dan nilai maksimum 7.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan, dapat disimpulkan bahwa solusi dari sistem persamaan *fully fuzzy* nonlinear dapat ditentukan dengan menggunakan metode Newton Raphson Ganda. Dari studi kasus yang diselesaikan, ditinjau dari jumlah iterasi yang kurang dari lima iterasi dan galat yang relatif kecil (kurang dari 10^{-3}), hal ini menunjukkan bahwa metode Newton Raphson Ganda dapat dijadikan salah satu alternatif metode numerik yang direkomendasikan pemakaiannya untuk mendapatkan nilai solusi optimal dari suatu sistem persamaan nonlinear *fully fuzzy*.

IV. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Jurusan Matematika FMIPA Universitas Lampung yang telah mengizinkan penggunaan fasilitas Laboratorium Matematika Terapan dan Statistika Terapan selama penulis melakukan kajian literatur dan praktek komputasi.

REFERENSI

[1] D. M. K. Yudhi, "Analisis Metode Newton-Raphson Ganda Orde Konvergensi Empat Dalam Menyelesaikan Sistem Persamaan Nonlinear," *Bimaster Bul. Ilm. Mat. Stat. dan Ter.*, vol. 8, no. 2, pp. 213–220, 2019, doi: 10.26418/bbimst.v8i2.31648.

[2] H.-J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory—and Its Applications*, 4th Ed. Springer Science+Business Media, LLC, 2001. doi: 10.1007/978-94-010-0646-0.

[3] C. C. Marzuki, A. Agustian`, D. Hariati, J. Afmilda, N. Husna, and P. Nanda, "Penyelesaian Sistem Persamaan Linier Fully Fuzzy Menggunakan Metode Dekomposisi Nilai Singular (SVD)," *J. Mat. "MANTIK,"* vol. 4, no. 2, pp. 143–149, 2018, doi: 10.15642/mantik.2018.4.2.143-149.

[4] C. C. Marzuki and H. Herawati, "Penyelesaian Sistem Persamaan Linear Fully Fuzzy Menggunakan Metode Iterasi Jacobi," *J. Sains, Teknol. dan Stat.*, vol. 1, no. 1, pp. 1–7, 2015.

[5] R. Ezzati, S. Khezerloo, and A. Yousefzadeh, "Solving Fully Fuzzy Linear System of Equations in General Form," *J. Fuzzy Set Valued Anal.*, vol. 2012, pp. 1–11, 2012, doi: 10.5899/2012/jfsva-00117.

[6] E. Siahlooei and S. A. S. Fazeli, "An application of interval arithmetic for solving fully fuzzy linear systems with trapezoidal fuzzy numbers," *Adv. Fuzzy Syst.*, vol. 2018, 2018, doi: 10.1155/2018/2104343.

[7] X. Guo and D. Shang, "Fuzzy approximate solution of positive fully fuzzy linear matrix equations," *J. Appl. Math.*, vol. 2013, 2013, doi: 10.1155/2013/178209.

[8] G. Malkawi, N. Ahmad, and H. Ibrahim, "Solving the fully fuzzy sylvester matrix equation with triangular fuzzy number," *Far East J. Math. Sci.*, vol. 98, no. 1, pp. 37–55, 2015, doi: 10.17654/FJMSSep2015_037_055.

[9] A. O. Umar, M. Mamat, and M. . Waziri, "Solving Dual Fuzzy Nonlinear Equations Via Modified Stirling'S Method," *J. Inf. Syst. Technol. Manag.*, vol. 4, no. 14, pp. 84–91, 2019, doi: 10.35631/jistm.414008.

[10] W. Megarani, D. Aziz, A. Amanto, and L. Zakaria, "Algoritma Penyelesaian Persamaan Nonlinear Fuzzy dengan Metode Modifikasi Newton-Raphson," *Siger*, vol. 1, no. 2, pp. 63–69, 2020, [Online]. Available: https://jurnal.fmipa.unila.ac.id/JSM/article/view/2676

[11] I. M. Sulaiman, M. Mamat, N. Zamri, and P. L. Ghazali, "Solving dual fuzzy nonlinear equations via Shamanskii method," *Int. J. Eng. Technol.*, vol. 7, no. 3.28 Special Issue 28, pp. 89–91, 2018, doi: 10.14419/ijet.v7i3.28.20974.

[12] J. Kołodziejczyk, A. Piegat, and W. Sałabun, "Which Alternative for Solving Dual Fuzzy Nonlinear Equations Is More Precise?," *Mathematics*, vol. 8, no. 1507, 2020, doi: 10.3390/math8091507.

[13] A. Ramli, M. L. Abdullah, and M. Mamat, "Broyden's method for solving fuzzy nonlinear equations," *Adv. Fuzzy Syst.*, vol. 2010, 2010, doi: 10.1155/2010/763270.

[14] A. Jafarian and R. Jafari, "A new computational method for solving fully fuzzy nonlinear matrix equations," *Int. J. Fuzzy Comput. Model.*, vol. 2, no. 4, pp. 275–285, 2019, doi: 10.1504/IJFCM.2019.100317.

[15] L. Zakaria, W. Megarani, A. Faisol, A. Nuryaman, and U. Muharramah, "Computational Mathematics: Solving Dual Fully Fuzzy Nonlinear Matrix Equations Numerically using Broyden's Method," *Int. J. Math. Eng. Manag. Sci.*, vol. 8, no. 1, pp. 60–77, 2023, doi: 10.33889/IJMEMS.2023.8.1.004.

[16] R. Jafari, S. Razvarz, and A. Gegov, "A new computational method for solving fully fuzzy nonlinear systems," *Lect. Notes Comput. Sci. (including Subser. Lect. Notes Artif. Intell. Lect. Notes Bioinformatics)*, vol. 11055 LNAI, pp. 503–512, 2018, doi: 10.1007/978-3-319-98443-8_46.

[17] R. Jafari, S. Razvarz, and A. Gegov, "A Novel Technique for Solving Fully Fuzzy Nonlinear," vol. 7, no. 1, pp. 93–107, 2020, doi: 10.1142/S2196888820500050.

[18] W. Megarani, L. Zakaria, A. Sutrisno, D. Aziz, and A. Nuryaman, "Algorithms and Programming: The Jacobi Method For Solving Dual Fully Fuzzy Linear Systems," *Recent Adv. Comput. Sci. Commun.*, p. Advance online publication, 2022, doi: 10.2174/2666255815666220511123035.

[19] J. N. Karthik and E. Chandrasekaran, "Solving Fully Fuzzy Linear Systems with Trapezoidal Fuzzy Number Matrices by Partitioning," *Ann. Pure Appl. Math.*, vol. 8, no. 2, pp. 261–267, 2014, [Online]. Available: www.researchmathsci.org

[20] T. Beaula and L.Mohan, "Cholesky Decomposition Method for Solving Fully Fuzzy Linear System of Equations with Trapezoidal Fuzzy Number," *Int. J. Fuzzy Math. Arch.*, vol. 14, no. 02, pp. 261–265, 2017, doi: 10.22457/ijfma.v14n2a10.

[21] R. S, “LU Decomposition Method for Solving Fully Fuzzy Linear System with Trapezoidal Fuzzy Numbers,” *Bonfring Int. J. Man Mach. Interface*, vol. 2, no. 2, pp. 01–03, 2012, doi: 10.9756/bijmmi.1237.

[22] S. S. Mukrimaa *et al.*, “Solusi Sistem Persamaan Nonlinier Dengan Menggunakan Metode Broyden,” 2016.