

Model *Predator-Prey* Leslie-Gower dengan Fungsi Respon Sokol-Howell dan Perilaku Anti *Predator*

Fardinah^{1*}, Darma Ekawati², Hikmah³, Hirman Rachman⁴, Masyita⁵

^{1,2,3} Program Studi Statistika, Universitas Sulawesi Barat, Majene 91412, Indonesia

^{4,5} Program Studi Matematika, Universitas Sulawesi Barat, Majene 91412, Indonesia

Corresponding Email*: fardinah@unsulbar.ac.id

Abstrak

Penelitian ini membahas tentang model *predator-prey* Leslie-Gower dengan fungsi respon Sokol-Howell dan perilaku anti *predator*. Diasumsikan bahwa *prey* memiliki perilaku anti *predator* yang bertujuan untuk mengurangi resiko predasi dan bukan sebagai upaya *prey* dalam mencari makanan. Penelitian ini bertujuan untuk memformulasikan model *predator-prey* Leslie-Gower dengan fungsi respon Sokol-Howell dan perilaku anti *predator*, menganalisis titik kesetimbangan model dan interpretasi model. Analisis kestabilan dilakukan dengan metode linearisasi. Jenis kestabilan ditentukan berdasarkan karakteristik nilai eigen yang diperoleh dengan menggunakan kriteria Routh-Hurwitz. Hasil analisis titik kesetimbangan diperoleh bahwa populasi *prey* akan eksis dan *predator* akan punah jika koefisien anti *predator* lebih besar dari koefisien pertumbuhan intrinsik *predator* sedangkan populasi *prey* dan *predator* akan selalu eksis jika jumlah *prey* lebih kecil dari perbandingan antara koefisien intrinsik *predator* dan koefisien anti *predator* serta memenuhi kondisi lain yang disyaratkan. Berdasarkan simulasi numerik yang dilakukan diperoleh titik kesetimbangan *prey* eksis yaitu $E_1(x,y) = (100,0)$ dan titik kesetimbangan populasi eksis yaitu $E_2(x,y) = (98.2,39.1)$. Jika koefisien anti *predator* diperbesar maka mengakibatkan jumlah populasi *prey* mengalami pertambahan sampai mendekati jumlah kapasitas lingkungan sedangkan populasi *predator* menurun secara signifikan dan seiring berjalannya waktu mengalami kepunahan

Kata Kunci: model Leslie-Gower, fungsi respon Sokol-Howell, anti *predator*

Abstract

This research discusses the Leslie-Gower predator-prey model with the Sokol-Howell response function and anti-predator behavior. It is assumed that prey have anti-predator behavior aimed at reducing the risk of predation and not as an attempt by the prey to find food. This research aims to formulate a Leslie-Gower predator-prey model with a Sokol-Howell response function and anti-predator behavior, analyze the equilibrium point of model and model interpretation. Stability analysis was carried out using the linearization method. The type of stability is determined based on the characteristics of the eigenvalues obtained using the Routh-Hurwitz criterion. The results of the equilibrium point analysis show that the prey population will exist and the predator will become extinct if the anti-predator coefficient is greater than the predator's intrinsic growth coefficient, while the prey and predator populations will always exist if the number of prey is smaller than the ratio between the predator's intrinsic coefficient and the anti-predator coefficient and meets other conditions required. Based on the numerical simulations performed, the existing prey equilibrium point is obtained, namely $E_1(x,y) = (100.0)$ and the existing population equilibrium point is $E_2(x,y) = (98.2,39.1)$. If the anti-predator coefficient is increased, it will result in the prey population increasing to close to the carrying capacity, while the predator population decreases significantly and over time experiences extinction

Keywords: Leslie-Gower model, Sokol-Howell response function, anti-predator

Received :25-08-2023, Revised :18-02-2024, Accepted :19-02-2024

1. Pendahuluan

Salah satu kejadian alami yang terjadi pada semua sistem kehidupan adalah interaksi antar individu. yaitu ekosistem. Ekosistem merupakan sistem ekologi yang terbentuk oleh hubungan timbal balik antara makhluk hidup dan lingkungannya. Ekosistem terdiri dari dua komponen penyusun, yaitu faktor abiotik (tidak hidup) dan biotik (hidup). Makhluk hidup pada dasarnya membutuhkan interaksi dengan makhluk lainnya ataupun dengan lingkungan tempat tinggalnya [1].

Setiap makhluk hidup dituntut untuk berinteraksi dengan makhluk hidup lainnya. Interaksi ini dapat terjadi antar sesama spesies maupun dengan spesies yang berbeda dan akan berdampak bagi spesies tersebut. Jika berdampak positif bagi keduanya, interaksi keduanya disebut simbiosis mutualisme. Jika berdampak negatif bagi keduanya disebut persaingan, dan jika berdampak positif bagi spesies yang satu sedangkan bagi spesies yang lainnya negatif maka interaksi tersebut disebut dengan *prey-predator* atau *prey-predator* [2].

Prey merupakan organisme yang dimakan dan biasa disebut mangsa. Sedangkan *predator* adalah organisme yang memakan dan biasa disebut pemangsa. Model *predator-prey* pertama kali diperkenalkan oleh Lotka pada tahun 1925 dan Volterra pada tahun 1926, sehingga model ini disebut juga model Lotka-Volterra [3].

Hubungan antara *prey* dan *predator* ini sangat menarik untuk dipelajari. Misalkan jumlah populasi *predator* yang banyak dengan tingkat predasi *predator* yang tinggi dapat mengakibatkan jumlah populasi *prey* berkurang. Jika keadaan ini terus berlangsung maka dikhawatirkan akan mengakibatkan kelangkaan dan akhirnya keseimbangan ekosistem terganggu. Oleh karena itu, dibutuhkan suatu analisis dinamik mengenai hubungan *predator-prey*.

Pada tahun 1948, Leslie dan Gower melakukan modifikasi pada sistem Lotka-Volterra. Populasi *predator* yang awalnya bertumbuh secara eksponensial dengan adanya pengaruh predasi dimodifikasi menjadi bertumbuh secara logistik dengan asumsi bahwa daya dukung lingkungan *predator* proporsional terhadap jumlah populasi *prey* dan model yang diperoleh dari modifikasi tersebut dikenal dengan model Leslie-Gower [4].

Dalam ekosistem sering kali kelompok mangsa diasumsikan tertangkap dan termangsa oleh pemangsa ketika terjadi predasi. Namun kenyataan di lingkungan tidak semua mangsa ketika bertemu pemangsa tertangkap dan termangsa. Dalam kasus ini ada beberapa mangsa yang mampu melawan dan berhasil menyelamatkan diri dari pemangsa. Perilaku mangsa yang berhasil meloloskan diri dan melawan pemangsa kemudian dikenal sebagai perilaku anti pemangsa [5].

Fungsi respon yang digunakan dalam artikel ini yaitu fungsi respon Sokol-Howell yang merupakan pengembangan dari fungsi respon Holling tipe III. Fungsi respon ini disebut juga fungsi respon tipe IV dan merupakan fungsi respon yang tidak monoton antara interaksi *predator-prey*, yaitu tingkat konsumsi pemangsa menurun akibat mangsa dapat bertahan atau melindungi diri dari pemangsa. Dengan kata lain, ketika jumlah populasi mangsa meningkat maka pertahanan kelompok semakin meningkat [6].

Beberapa penelitian sebelumnya telah membahas mengenai model *predator-prey* diantaranya yaitu [7] yang membahas mengenai Analisis Model *predator-prey* Leslie-Gower dengan Pemberian Racun pada *predator*. Penelitian tersebut menggunakan fungsi respon Holling tipe II yang menghasilkan titik kesetimbangan kepunahan *predator* yang tidak stabil dan titik kesetimbangan interior yang stabil dengan syarat tertentu.. Sedangkan penelitian mengenai model *predator-prey* dengan sifat anti pemangsa sebelumnya telah dilakukan oleh [8] mengenai Model Interaksi Mangsa Pemangsa dengan Fungsi Respon Rasio Dependent Holling Tipe II dan Perilaku Anti Pemangsa. Dari penelitian tersebut diperoleh tiga titik kesetimbangan dan perilaku anti pemangsa berpengaruh terhadap kestabilan titik kesetimbangan.

Berdasarkan kajian model *predator-prey* tersebut, peneliti tertarik untuk membahas model *predator-prey* yang berbeda dengan peneliti terdahulu dengan mengubah sedikit model yang digunakan. Analisis dilakukan secara analitik dan secara numerik dengan bantuan *software* Maple. Analisis yang dilakukan meliputi menentukan titik kesetimbangan, analisis kestabilan titik kesetimbangan dan simulasi numerik. Simulasi numerik dilakukan untuk mengkonfirmasi kesesuaian antara perhitungan analitik dan numerik. Perubahan kestabilan terhadap titik kesetimbangan ditunjukkan oleh variasi nilai parameter sifat anti *predator*.

2. Landasan Teori

2.1 Fungsi Respon

Fungsi respon dalam ekologi diartikan sebagai jumlah makanan yang dikonsumsi oleh pemangsa sebagai fungsi kepadatan makanan [9]. Tahun 1953 Holling memperkenalkan fungsi respon yang dikenal

sebagai fungsi respon Holling yaitu:

a. Holling Tipe I

Fungsi respon Holling tipe I terjadi pada jenis pemangsa yang pasif dan lebih memilih menunggu mangsanya. Pada tipe ini ditandai dengan meningkatnya laju konsumsi pemangsa secara linear seiring bertambahnya kepadatan mangsa. Namun akan konstan ketika pemangsa berhenti memangsa. Bentuk fungsi respon Holling tipe I dinyatakan sebagai berikut :

$$p(x) = ax$$

dengan p menunjukkan fungsi respon Holling tipe I dan a sebagai laju penangkapan mangsa oleh pemangsa.

b. Holling Tipe II

Fungsi respon Holling tipe II terjadi pada pemangsa yang membutuhkan waktu dalam mencari dan mengkonsumsi mangsanya. Sehingga dalam tipe II ini penggunaan waktu mulai diperhitungkan dengan sifat pemangsa yang tidak mencari mangsa pengganti ketika mangsa utama punah. Bentuk persamaan fungsi respon Holling tipe II yaitu :

$$p(x) = \frac{\beta N}{1 + \gamma N}$$

dengan γ menunjukkan waktu yang dibutuhkan oleh pemangsa dalam mengkonsumsi mangsa. [10]

c. Holling Tipe III

Tipe III dari fungsi respon Holling merupakan pengembangan dari tipe II, yaitu mulai adanya indikasi bahwa pemangsa mencari mangsa lain di luar mangsa utama ketika kepadatan mangsa utama rendah. Sedangkan waktu yang dibutuhkan oleh pemangsa dalam menangani mangsanya tetap diperhitungkan, yaitu meliputi waktu mencari, menangkap dan menghabiskan mangsanya. Berikut persamaan fungsi respon Holling tipe III yaitu [11]

$$p(x) = \frac{\beta x^2}{\eta^2 + x^2}$$

d. Holling tipe IV

Bentuk fungsi respon Holling tipe IV yaitu [12]:

$$p(x) = \frac{mx}{1 + bx + ax^2}.$$

Fungsi diatas disebut juga fungsi respon Monod-Haldane. Sokol-Howell menambahkan jika $b = 0$ maka fungsi tersebut menjadi

$$p(x) = \frac{mx}{1+ax^2}. \quad (1)$$

2.2 Model Leslie-Gower

Pada tahun 1948, Leslie dan Gower memperkenalkan model dengan populasi *predator* tumbuh mengikuti model logistik sehingga pertumbuhannya terbatas. Selain itu, laju pertumbuhan *predator* sebanding dengan banyaknya populasi *prey*. Sehingga jika dinotasikan $x(t)$ sebagai kepadatan populasi *prey* dan $y(t)$ merupakan kepadatan populasi *predator* maka model *Leslie-Gower* diberikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial yaitu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (r_1 - c_1 y - b_1 x)x \\ \dot{y} &= \left(r_2 - c_2 \frac{y}{x}\right)y \end{aligned} \quad (2)$$

dengan x dan y adalah variabel yang bergantung pada t sedangkan b_1, c_1, c_2, r_1 dan r_2 adalah konstanta positif. [7]

2.3 Model *predator-prey* dengan perilaku Anti *predator*

Salah satu interaksi yang dilakukan *prey* terkadang dapat melukai *predator*. Perilaku *prey* tersebut dikatakan sebagai perilaku anti *predator*. Perilaku anti *predator* sangat sering ditemukan di lingkungan sekitar kita. Perilaku tersebut membantu *prey* untuk bertahan hidup melawan *predator* [13].

Perilaku anti *predator* yang dimiliki oleh *prey* merupakan hasil dari proses belajar selama menghindari *predator*. Perilaku ini sebagai bentuk adanya perubahan morfologi yang terjadi pada *prey* sehingga *prey* kebal terhadap serangan *predator*. Perilaku anti *predator* yang dimiliki *prey* hanya berlaku untuk *predator* yang dikenali oleh *prey* sebagai *predator* yang memangsanya. Model interaksi *predator-prey* dikatakan

memiliki perilaku anti predator ditandai dengan adanya parameter η yang melambangkan perilaku anti predator [8].

2.4 Kestabilan Titik Keseimbangan

Berikut definisi titik keseimbangan, matriks Jacobian, linearisasi sistem dan teorema hubungan antara nilai eigen dan linearisasi.

Titik $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ disebut titik keseimbangan sistem $\dot{x} = f(x)$. [14]

Diberikan sistem $\dot{x} = f(x)$ dengan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ dengan $f_i \in C'(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$, $E \subset \mathbb{R}^n$ dan \bar{x} merupakan titik keseimbangan sistem $\dot{x} = f(x)$. Matriks

$$Jf(\bar{x}) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

dinamakan matriks Jacobian Sistem $\dot{x} = f(x)$ dititik \bar{x} .

Selanjutnya, sistem $\dot{y} = Jf(\bar{x})y$ dengan $y = x - \bar{x}$ disebut linearisasi dari Sistem $\dot{x} = f(x)$ di sekitar titik keseimbangan \bar{x} .

Misalkan \bar{x} adalah titik keseimbangan hiperbolik Sistem $\dot{x} = f(x)$,

- jika bagian real semua nilai eigen $Jf(\bar{x})$ negatif, maka \bar{x} stabil asimtotik.
- jika terdapat nilai eigen dari $Jf(\bar{x})$ dengan bagian real positif, maka \bar{x} tidak stabil. [15]

Dalam penelitian ini digunakan metode kriteria Routh-Hurwitz untuk menentukan karakteristik akar persamaan tanpa perlu menyelesaikannya. Berikut ini diberikan definisi matriks Hurwitz dan determinannya.

(i) Diberikan polinomial karakteristik matriks A.

$$P_A \lambda = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

dengan $a_0 \neq 0$. Diasumsikan semua a_k real dan $P_A \lambda$ tidak mempunyai akar imajiner murni. Matriks Hurwitz H didefinisikan sebagai matriks persegi yang berukuran $n \times n$ dengan bentuk sebagai berikut:

$$H = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

(ii) Determinan Matriks Hurwitz orde ke k, dinotasikan Δ_k yang dibentuk dari matriks Hurwitz berukuran n didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= a_1 \\ \Delta_2 &= \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix} \\ \Delta_3 &= \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ \Delta_k &= \det \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dalam mengaplikasikan metode kriteria Routh-Hurwitz pada suatu persamaan karakteristik, berikut ini diberikan suatu teorema yang menjamin semua akar polinomial pada persamaan $P_A\lambda$ memiliki akar-akar dengan semua bagian realnya negatif.

Semua akar polinomial persamaan $P_A\lambda$ mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika memenuhi:

$$a_0\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, a_0\Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0,$$

\vdots

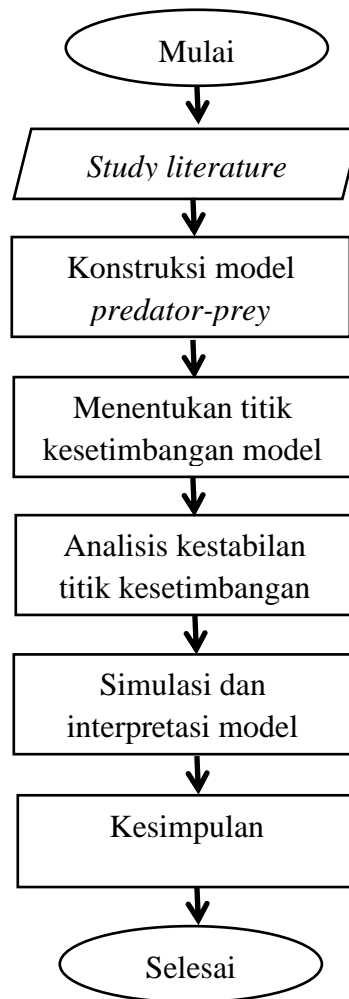
$$a_0\Delta_k > 0, \text{ untuk } k \text{ ganjil}$$

$$\Delta_k > 0, \text{ untuk } k \text{ genap.}$$

Jika polinomial persamaan $P_A\lambda$ dituliskan sedemikian hingga $a_0 > 0$, maka menurut kriteria Routh-Hurwitz semua akar polinomial persamaan $P_A\lambda$ mempunyai bagian real negatif jika dan hanya jika $\Delta_i > 0$ untuk semua $i \leq k$. [16]

3. Metode

Prosedur penelitian yang digunakan berdasarkan bagan berikut:



Gambar 1. Prosedur penelitian

4. Hasil dan Pembahasan

4.1 Model predator-prey Leslie-Gower dengan fungsi respon Sokol-Howell dan sifat anti predator

Dalam mengkonstruksi model *predator-prey* Leslie-Gower dengan fungsi respon Sokol-Howell dan perilaku anti *predator* menggunakan asumsi sebagai berikut:

1. Terdapat satu *predator* dan satu *prey*.
2. Dalam keadaan tanpa *predator* populasi *prey* tumbuh secara logistik.
3. *Prey* memiliki makanan yang cukup.

4. *Prey* merupakan makanan utama bagi *predator*
5. *Predator* tumbuh secara logistik dan daya dukung *predator* bergantung pada jumlah populasi *prey*
6. Fungsi *predatoran* menggunakan fungsi respon Sokol-Howell.
7. *Prey* memiliki sifat anti *predator*

Berdasarkan asumsi yang diberikan serta dari persamaan (1) dan (2) diperoleh model *predator-prey* Leslie-Gower dengan fungsi respon Sokol-Howell dan perilaku anti *predator* sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{bxy}{c + x^2} \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{nx}\right) - hxy\end{aligned}\tag{3}$$

dengan r, k, b, c, s, n , dan $h \in \mathbb{R}^+$.

Daftar variabel dan parameter yang digunakan dalam model seperti disajikan dalam Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Daftar variabel dan parameter

Notasi	Interpretasi
x	Jumlah <i>prey</i>
y	Jumlah <i>predator</i>
r	Koefisien pertumbuhan intrinsik <i>prey</i>
k	Daya dukung lingkungan <i>prey</i>
nx	Daya dukung lingkungan <i>predator</i>
b	koefisien pemangsaan <i>predator</i> terhadap <i>prey</i>
c	Koefisien saturasi
s	Koefisien pertumbuhan intrinsik <i>predator</i>
h	koefisien anti <i>predator</i>

4.2 Titik Keseimbangan Model

Didefinisikan $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) | x \geq 0, y \geq 0, x, y \in \mathbb{R}\}$. Titik keseimbangan Sistem(3) adalah solusi dari Sistem (3) yang memenuhi $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Dengan demikian titik keseimbangan dari Sistem (3) ditentukan melalui persamaan berikut:

$$\begin{aligned}rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{bxy}{c + x^2} &= 0 \\ sy \left(1 - \frac{y}{nx}\right) - hxy &= 0\end{aligned}$$

Dari $rx \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{bxy}{c + x^2} = 0$ diperoleh $x \left[r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{by}{c + x^2}\right] = 0$ Selanjutnya diperoleh $x = 0$ atau $r \left(1 - \frac{x}{k}\right) - \frac{by}{c + x^2} = 0$.

Dari $sy \left(1 - \frac{y}{nx}\right) - hxy = 0$ diperoleh $y \left[s \left(1 - \frac{y}{nx}\right) - hx\right] = 0$. Selanjutnya diperoleh $y = 0$ atau $\left[s \left(1 - \frac{y}{nx}\right) - hx\right] = 0$.

Dengan demikian titik keseimbangan Sistem (3) sebagai berikut:

- i. Titik keseimbangan *prey* eksis $E_1(k, 0)$
- ii. Titik keseimbangan populasi eksis $E_2(\tilde{x}, \tilde{y})$ dengan \tilde{x} adalah akar-akar positif dari persamaan $rsx^3 - (krs + kbnh)x^2 + (rsc + kbns)x - krsc = 0$ dan $\tilde{y} = \frac{n}{s}(s\tilde{x} - h\tilde{x}^2)$ dengan syarat $\tilde{x} < \frac{s}{h}$.

4.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Model

Pada bagian ini akan dipelajari mengenai dinamika di sekitar titik kesetimbangan Sistem (3). Untuk mengidentifikasi kestabilan dari titik kesetimbangan, dilakukan pelinearan terhadap Sistem (3). Hasil pelinearan memberikan matriks Jacobian sebagai berikut:

$$J = \begin{bmatrix} r \left(1 - \frac{2x}{k}\right) + \frac{by(x^2 - c)}{(c + x^2)^2} & \frac{-bx}{c + x^2} \\ \frac{sy^2}{nx^2} & s - h - \frac{2sy}{nx} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya akan ditentukan kestabilan titik kesetimbangan *prey* eksis $E_1(k, 0)$. Substitusi $E_1(k, 0)$ ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$J_1 = \begin{bmatrix} -r & \frac{-bk}{c+k^2} \\ 0 & s-h \end{bmatrix}.$$

Untuk menentukan nilai eigen λ digunakan persamaan $|J_1 - \lambda I| = 0$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} \left| \begin{bmatrix} -r & \frac{-bk}{c+k^2} \\ 0 & s-h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| &= 0 \\ \begin{vmatrix} -r-\lambda & \frac{-bk}{c+k^2} \\ 0 & s-h-\lambda \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Diperoleh persamaan karakteristik:

$$(-r - \lambda)(s - h - \lambda) = 0.$$

Sehingga diperoleh nilai eigen $\lambda = -r$ atau $\lambda = s - h$.

Dengan demikian, titik kesetimbangan *prey* eksis $E_1(k, 0)$ akan stabil jika $s < h$.

Selanjutnya akan ditentukan kestabilan titik kesetimbangan populasi eksis $E_2(\tilde{x}, \tilde{y})$. Substitusi $E_2(\tilde{x}, \tilde{y})$ ke matriks Jacobian (J) diperoleh:

$$J_2 = \begin{bmatrix} r - \frac{2r\tilde{x}}{k} - \frac{bn(s\tilde{x} - h\tilde{x}^2)(c - \tilde{x}^2)}{s(c + \tilde{x}^2)^2} & -\frac{b\tilde{x}}{c + \tilde{x}^2} \\ \frac{2h^2}{s}\tilde{x}^2 - 3nh\tilde{x} + ns & h\tilde{x} - s \end{bmatrix}$$

Untuk menentukan nilai eigen λ digunakan persamaan $|J_2 - \lambda I| = 0$ sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} |J_2 - \lambda I| &= \left| \begin{bmatrix} r - \frac{2r\tilde{x}}{k} - \frac{bn(s\tilde{x} - h\tilde{x}^2)(c - \tilde{x}^2)}{s(c + \tilde{x}^2)^2} & -\frac{b\tilde{x}}{c + \tilde{x}^2} \\ \frac{2h^2}{s}\tilde{x}^2 - 3nh\tilde{x} + ns & h\tilde{x} - s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0 \\ |J_2 - \lambda I| &= \begin{vmatrix} r \left(1 - \frac{2r\tilde{x}}{k}\right) + \frac{bn \left(1 - \frac{h}{s}\right) (\tilde{x}^2 - c) \tilde{x}}{(c + \tilde{x}^2)^2} - \lambda & \frac{-b\tilde{x}}{c + \tilde{x}^2} \\ sn \left(1 - \frac{h}{s}\right)^2 & h - s - \lambda \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Diperoleh persamaan karakteristik:

$$\left(r - \frac{2r\tilde{x}}{k} - \frac{bn(s\tilde{x} - h\tilde{x}^2)(c - \tilde{x}^2)}{s(c + \tilde{x}^2)^2} - \lambda \right) (h\tilde{x} - s - \lambda) - \left(\frac{2h^2}{s}\tilde{x}^2 - 3nh\tilde{x} + ns \right) \left(\frac{-b\tilde{x}}{c + \tilde{x}^2} \right) = 0.$$

Diperoleh:

$$\lambda^2 + \left(-r + \frac{2r\tilde{x}}{k} + \frac{bn(s\tilde{x} - h\tilde{x}^2)(c - \tilde{x}^2)}{s(c + \tilde{x}^2)^2} - h\tilde{x} + s \right) \lambda + \left(r - \frac{2r\tilde{x}}{k} - \frac{bn(s\tilde{x} - h\tilde{x}^2)(c - \tilde{x}^2)}{s(c + \tilde{x}^2)^2} \right) (h\tilde{x} - s) + \left(\frac{2h^2}{s} \tilde{x}^2 - 3nh\tilde{x} + ns \right) \left(\frac{b\tilde{x}}{c + \tilde{x}^2} \right) = 0, \text{ dengan } \tilde{x} < \frac{s}{h}.$$

Jika dimisalkan:

$$B = -r + \frac{2r\tilde{x}}{k} + \frac{bn(s\tilde{x} - h\tilde{x}^2)(c - \tilde{x}^2)}{s(c + \tilde{x}^2)^2} - h\tilde{x} + s$$

$$C = \left(r - \frac{2r\tilde{x}}{k} - \frac{bn(s\tilde{x} - h\tilde{x}^2)(c - \tilde{x}^2)}{s(c + \tilde{x}^2)^2} \right) (h\tilde{x} - s) + \left(\frac{2h^2}{s} \tilde{x}^2 - 3nh\tilde{x} + ns \right) \left(\frac{b\tilde{x}}{c + \tilde{x}^2} \right)$$

maka persamaan karakteristik menjadi:

$$\lambda^2 + B\lambda + C = 0.$$

Dengan demikian diperoleh Matriks Hurwitz:

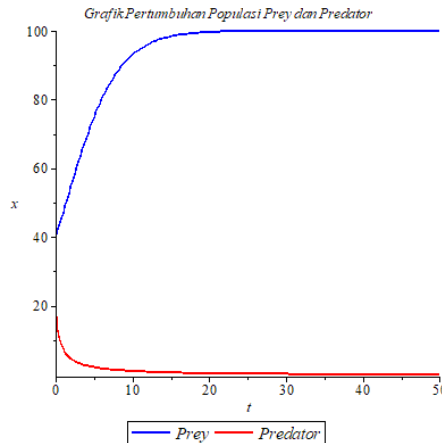
$$H = \begin{bmatrix} B & 1 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Berdasarkan kriteria Routh-Hurwitz diperoleh bahwa titik kesetimbangan populasi eksis $E_2(\tilde{x}, \tilde{y})$ akan stabil jika $B > 0$ dan $C > 0$ dengan $\tilde{x} < \frac{s}{h}$.

4.4 Simulasi dan Interpretasi Model

Simulasi numerik dilakukan untuk memperkuat hasil analisis yang telah diperoleh sebelumnya terhadap Sistem (3). Simulasi yang dilakukan meliputi simulasi kestabilan titik kesetimbangan *prey* eksis E_1 , titik kesetimbangan populasi eksis E_2 dan pengaruh koefisien anti pemangsa terhadap dinamika pertumbuhan populasi *prey* dan *predator*. Karena keterbatasan data yang ada, pemilihan parameter disesuaikan dengan syarat kestabilan yang diberikan pada hasil analisis sebelumnya.

Parameter yang digunakan pada simulasi kestabilan titik kesetimbangan E_1 yaitu $r = 0.3$, $b = 0.1$, $k = 100$, $c = 0.05$, $s = 0.1$, $n = 0.03$, dan $h = 0.2$ yang memberikan nilai titik kesetimbangan $E_1(x, y) = (100, 0)$. Diperoleh Gambar 1 sebagai berikut:



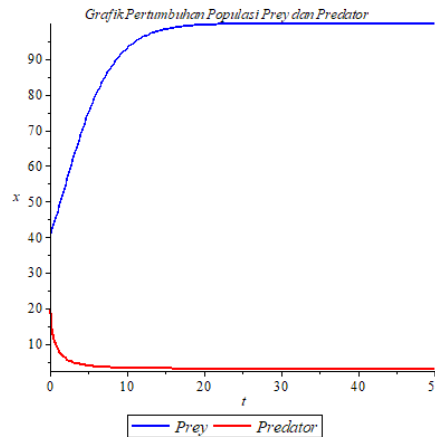
Gambar 1. Pertumbuhan populasi *prey* dan *predator* berdasarkan E_1

Gambar 1 memperlihatkan bahwa pada awal waktu populasi *prey* mengalami peningkatan karena adanya laju pertumbuhan intrinsik pada *prey*. Pertambahan populasi *prey* ini terus berlangsung seiring berjalannya waktu sampai mendekati nilai kapasitas lingkungan. Sedangkan populasi *predator* pada awal waktu mengalami penurunan yang disebabkan oleh semakin banyaknya jumlah *prey* yang mengakibatkan kapasitas lingkungan *predator* semakin berkurang dan adanya sifat anti *predator*. Seiring berjalannya waktu populasi *predator* semakin menurun hingga mendekati kepunahan yang disebabkan oleh koefisien pertumbuhan intrinsik *predator* yang lebih kecil dari koefisien anti *predator*. Gambar 1 juga

memperlihatkan bahwa simulasi numerik yang dilakukan sesuai dengan hasil analitik.

Selanjutnya dilakukan simulasi dengan koefisien anti *predator* sebagai kontrol. Dalam hal ini dilakukan simulasi dengan dua nilai koefisien anti *predator* (h) yang berbeda, yaitu pada saat tidak ada sifat anti *predator* ($h = 0$), dan pada saat koefisien anti *predator* dibuat menjadi lima kali lipat dari koefisien kelahiran intrinsik *predator* ($h = 0.5$) dan koefisien pertumbuhan intrinsik *predator* $s = 0.1$.

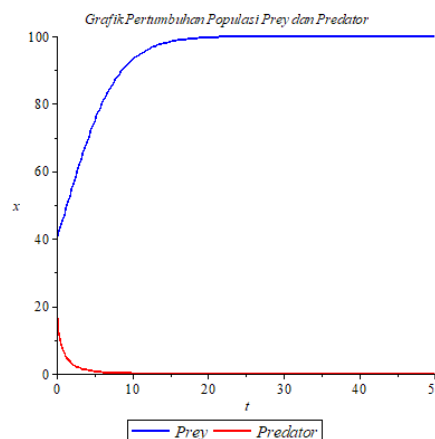
Simulasi untuk anti *predator* $h = 0$ dan koefisien pertumbuhan intrinsik *predator* $s = 0.1$ diberikan dalam Gambar 2.1 sebagai berikut:



Gambar 2.1 Pertumbuhan populasi *prey* dan *predator* berdasarkan E_1 dengan $h = 0$

Gambar 2.1 memperlihatkan bahwa populasi *predator* terus menurun hingga pada waktu $t = 15$ namun tidak sampai menuju kepunahan sedangkan populasi *prey* terus meningkat sampai menuju ke jumlah kapasitas lingkungan.

Simulasi untuk anti *predator* $h = 0.5$ dan koefisien pertumbuhan intrinsik *predator* $s = 0.1$ diberikan dalam Gambar 2.2 sebagai berikut:

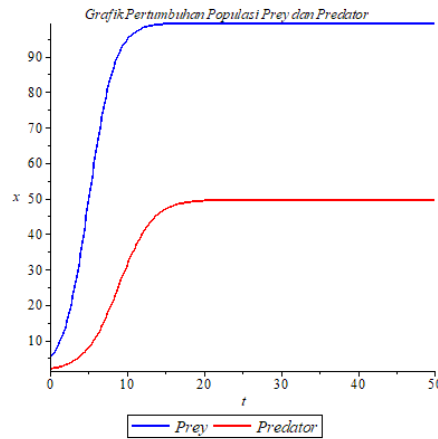


Gambar 2.2 Pertumbuhan populasi *prey* dan *predator* berdasarkan E_1 dengan $h = 0.5$

Gambar 2.2 memperlihatkan bahwa populasi *predator* terus menurun hingga pada waktu $t = 10$ jumlah *predator* menuju kepunahan sedangkan jumlah *prey* terus mengalami peningkatan sampai menuju ke jumlah kapasitas lingkungan.

Dari Gambar 2.1 dan Gambar 2.2 dapat diperoleh bahwa hasil simulasi sesuai dengan analisis kestabilan yang telah dilakukan bahwa titik kesetimbangan jumlah *prey* eksis E_1 akan stabil jika koefisien anti *predator* lebih besar dari pertumbuhan intrinsik *predator*.

Parameter yang digunakan pada simulasi kestabilan titik kesetimbangan E_1 yaitu $r = 0.6$, $b = 0.8$, $k = 100$, $c = 0.005$, $s = 0.5$, $n = 0.5$, dan $h = 0.001$ yang memberikan nilai titik kesetimbangan $E_2(x, y) = (98.2, 39.1)$. Diperoleh Gambar 3 sebagai berikut:

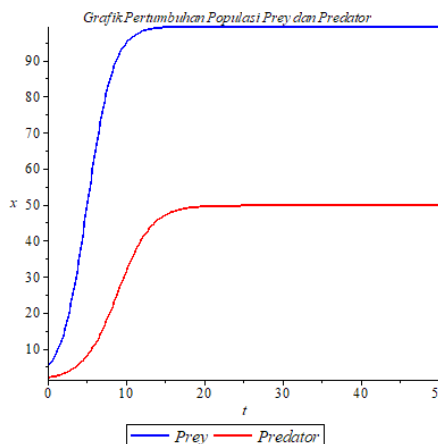


Gambar 3. Pertumbuhan populasi *prey* dan *predator* berdasarkan E_2

Gambar 3 memperlihatkan bahwa pada awal waktu populasi *prey* mengalami peningkatan karena adanya laju kelahiran intrinsik pada *prey*. Pertambahan populasi *prey* ini terus berlangsung seiring berjalannya waktu sampai mendekati nilai titik kesetimbangan populasi eksis E_2 yaitu 98.2 sedangkan populasi *predator* pada awal waktu mengalami peningkatan yang disebabkan oleh banyaknya *prey* yang dapat dimangsa dan adanya koefisien kelahiran intrinsik *predator*. Seiring berjalannya waktu pertumbuhan *predator* menjadi konstan dan jumlah populasi *predator* mendekati nilai titik kesetimbangan populasi eksis E_2 yaitu 39.1. Gambar 3 juga memperlihatkan bahwa simulasi numerik yang dilakukan sesuai dengan hasil analitik yang telah dilakukan sebelumnya yaitu titik kesetimbangan E_2 stabil jika jumlah *prey* lebih kecil dari perbandingan antara koefisien intrinsik *predator* dan koefisien anti *predator*.

Selanjutnya dilakukan simulasi dengan koefisien anti *predator* sebagai kontrol. Dalam hal ini dilakukan simulasi dengan dua nilai koefisien anti *predator* (h) yang berbeda, yaitu pada saat tidak ada sifat anti *predator* ($h = 0$) dan pada saat koefisien anti *predator* dibuat menjadi lima kali lipat dari koefisien kelahiran intrinsik *predator* ($h = 0.8$).

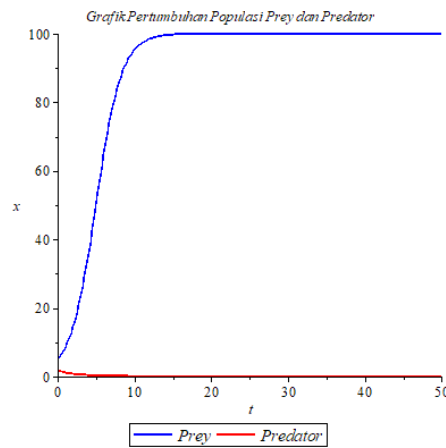
Simulasi untuk anti *predator* $h = 0$ dan koefisien pertumbuhan intrinsik *predator* $s = 0.5$ diberikan dalam Gambar 3.1 sebagai berikut:



Gambar 3.1 Pertumbuhan populasi *prey* dan *predator* berdasarkan E_2 dengan $h = 0$

Gambar 3.1 memperlihatkan bahwa populasi *prey* terus mengalami peningkatan yang diikuti juga oleh peningkatan jumlah *predator*. Hal ini disebabkan karena bertambahnya jumlah *prey* mengakibatkan semakin banyak yang dapat dimangsa sehingga akan menambah kelahiran individu baru bagi *predator*. Selain itu tidak adanya anti *predator* mengakibatkan semakin berkurangnya faktor yang menghambat pertumbuhan *predator*.

Simulasi untuk anti *predator* $h = 0.8$ dan koefisien pertumbuhan intrinsik *predator* $s = 0.5$ diberikan dalam Gambar 3.2 sebagai berikut:



Gambar 3.2 Pertumbuhan populasi *prey* dan *predator* berdasarkan E_2 dengan $h = 0.8$

Gambar 3.2 memperlihatkan bahwa populasi *prey* terus mengalami peningkatan sedangkan *predator* terus mengalami penurunan. Hal ini disebabkan karena bertambahnya jumlah *prey* mengakibatkan semakin banyak *prey* yang melawan *predator*. Seiring berjalannya waktu jumlah *prey* terus bertambah hingga mendekati batas kapasitas lingkungan yaitu $x = 100$ sedangkan jumlah *predator* terus menurun hingga pada waktu $t = 10$ jumlah *predator* menuju kepunahan.

Dari Gambar 3.1 dan Gambar 3.2 dapat diperoleh bahwa hasil simulasi sesuai dengan analisis kestabilan yang telah dilakukan bahwa titik kesetimbangan populasi eksis E_2 akan stabil jika jumlah *prey* lebih kecil dari perbandingan antara koefisien intrinsik *predator* dan koefisien anti *predator*.

4. Kesimpulan

Formulasi model *predator-prey* Leslie-Gower dengan fungsi respon Sokol-Howell dan perilaku anti *predator* seperti ditunjukkan pada Sistem (3). Dari sistem tersebut diperoleh dua titik kesetimbangan yaitu *prey* eksis dan populasi eksis. Hasil analisis titik kesetimbangan diperoleh bahwa titik kesetimbangan *prey* eksis stabil yang berarti bahwa populasi *prey* akan selalu ada dengan syarat koefisien anti *predator* lebih besar dari koefisien kelahiran intrinsik *predator* sedangkan titik kesetimbangan populasi eksis stabil yang berarti bahwa populasi *prey* dan *predator* akan selalu ada jika jumlah *prey* lebih kecil dari perbandingan antara koefisien intrinsik *predator* dan koefisien anti *predator* dan juga memenuhi kondisi lain yang disyaratkan. Berdasarkan simulasi numerik yang dilakukan diperoleh interpretasi bahwa koefisien anti *predator* yang diperbesar mengakibatkan jumlah populasi *prey* mengalami pertambahan sampai mendekati jumlah kapasitas lingkungan sedangkan populasi *predator* menurun secara signifikan dan seiring berjalannya waktu dapat mengalami kepunahan.

Referensi

- [1] M. L. Logan, S.G. Fernandez and R. Calsbeek, "Abiotic Constraints on The Activity of Tropical Lizards", *Functional Ecology*, vol. 29, no.5, pp. 694-700. 2015.
- [2] S. N. Aftayah, "Analisis Dinamik Model *predator-prey* Leslie-ttower dengan Fungsi Respon Holling Tipe II", *Jurnal Ilmiah Teknologi dan Informasia ASIA (JITIKA)*, Vol. 9, No. 2. 2015.
- [3] S. J. Ali, N.Md. Arifin. N.Md, R.K. Naid, F. Ismail and N. Bachok, A three species of Leslie Gower *predator-prey* food chain model with Sokol Howell functional response. Institute for Mathematical Research, University Putra Malaysia. Malaysia, 2014.
- [4] P. H. Leslie, "Some Further Notes on the Use of Matrices in Population Mathematics", Oxford University Press, *Biometrika*, vol. 35.1948.
- [5] S. G. Mortoja, P. Panja and S.K. Mondal, "Dynamics of a *predator-prey* Model with Stage Structure on Both Species and Anti-*predator* Behavior", *Informatics in Medicine Unlocked*, vol. 10, pp. 50–57. 2018.

- [6] S. Ruan and D. Xiao, “Global Anlysis in *predator-prey* System with Nonmotonic Functional Response”, Society for Industrial And Applied Mathematics, vol. 61, no.4, pp. 1445-1472. 2001.
- [7] S.H. Arsyad, Resmawan and N. Ahmad, “Analisis Model *predator-prey* Leslie-Gower dengan Pemberian Racun pada *predator*”, Jurnal Riset dan Aplikasi Matematika, vol.4, no.1, pp.1-16, 2020.
- [8] S. Saadah, Abadi and D. Savitri. “Model Interaksi Mangsa Pemangsa dengan Fungsi Respon Rasio Dependent Holling Tipe II dan Perilaku Anti Pemangsa”, Jurnal Ilmiah Matematika, vol.7, no.2, pp.6-9, 2019.
- [9] P. Panja, S.K. Mondal and Chattopadhyay, “Dynamical Effects of Anti-*predator* Behaviour of Adult *prey* in a *predator-prey* Model with Ratio-Dependent Functional Response”. Asian J. Journal of Mathematics and Physics, vol. 1, no. 1, pp. 19–32. 2017
- [10] H. S. Panigoro, “Analisis Dinamik Sistem *predator-prey* Model Leslie-Gower dengan Pemanenan Secara Konstan Terhadap *predator*”, Euler, vol.2, no. 1, pp. 1–12. 2014.
- [11] J. N. Ndam, J.P. Chollom and T.G. Kassem, T. G. “A Mathematical Model of Three-Species Interactions in an Aquatic Habitat”, ISRN Applied Mathematics, pp. 1–11. 2012.
- [12] Z. Lie, W. Weiming, X.Yakui and J. Zhen, “Complex dynamics of a Holling-type IV *predator prey* model”, China: Department of Mathematics, North University of China. 2020.
- [13] J. Harianto, T. Suparwanti and A.L.P. Dewi, “Dinamika Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium ModelMangsa-Pemangsa dengan Perilaku Anti-Pemangsa”, Jurnal ILMU DASAR, vol. 22, no. 2, pp. 153-160. 2021.
- [14] F. Verhulst, Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems, Springer – Verlag, New- York, USA, 1990.
- [15] L. Perko, Differential Equation and Dynamical System, New York, SpringerVerlag Berlin Heidelberg, 1991.
- [16] F. Gantmacher, The Theory of Matrices, Chelsea Publishing Company, 2020.



© 2024 Journal of Mathematics and Applications (JOMTA). This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License. **Editorial of JOMTA:** Department of Mathematics, Universitas Sulawesi Barat, Jalan Prof. Dr. Baharuddin Lopa, S.H., Talumung, Majene 91412, Sulawesi Barat.