

Implementasi Prinsip Pontryagin Dalam Masalah Kontrol Optimal Pada Model Matematika Interaksi Perokok

Lukman Hakim^{1*}

¹ Program Studi Teknik Informatika, Institut Teknologi dan Bisnis Asia Malang, Indonesia

Corresponding Email*: bledeklukman@gmail.com

Abstrak

Pemodelan matematika dengan pendekatan persamaan diferensial merupakan salah satu cara yang dapat digunakan untuk menggambarkan fenomena atau kejadian yang ada di alam sekitar manusia. Adapun fenomena yang dikaji pada penelitian ini merupakan model matematika yang menggambarkan suatu interaksi individu antara perokok konvensional dan elektrik. Pertama-tama, rekonstruksi model interaksi perokok konvensional dan perokok elektrik dengan mengimplementasikan variabel-variabel kontrol pada sistem persamaannya. Beberapa variabel kontrol yang ditambahkan pada model berjumlah empat, yaitu $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, dan $u_4(t)$, dengan variabel kontrol $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ yang merepresentasikan adanya implementasi edukasi kepada masyarakat awam yang berpotensi untuk merokok, dan bahaya akibat menjadi perokok pasif diantara perokok konvensional atau perokok elektrik. Sedangkan kontrol $u_3(t)$ dan $u_4(t)$ merepresentasikan suatu edukasi tentang pentingnya manfaat atau hal positif yang akan diperoleh jika berhenti dari kebiasaan merokok secara konvensional maupun elektrik. Berdasarkan pada model yang telah dikonstruksi, maka implementasi kontrol optimal dapat meminimalkan jumlah populasi yang aktif merokok secara konvensional ataupun perokok elektrik. Proses menyelesaikan model matematika dalam bentuk masalah kontrol optimal dikerjakan dengan pendekatan prinsip minimum Pontryagin, dan fungsi tujuannya berbentuk Lagrange. Hasil analisis dari sistem persamaan menunjukkan bahwa model optimal jika memenuhi kriteria *state*, kriteria *costate*, dan kriteria *stationer*. Selanjutnya, sebagai pendukung dari hasil analisis yang telah dikerjakan, maka pendekatan atau simulasi numerik ditunjukkan dengan bantuan *software* Matlab. Bagian akhir penelitian memperlihatkan, bahwa hasil simulasi memperkuat hasil analisis, yaitu variabel kontrol dan bobot yang diterapkan pada model mampu meminimumkan jumlah populasi yang aktif sebagai perokok konvensional atau elektrik.

Kata Kunci: pemodelan matematika, perokok konvensional, perokok elektrik, kontrol optimal, prinsip pontryagin, simulasi numerik

Abstract

Mathematical modeling using a differential equation approach is one way to describe a phenomena or an incident that exist in the whole world around humans. The phenomenon studied in this research is a mathematical model that describes an individual interaction between conventional and electric smokers. First of all, reconstruct the interaction model of conventional smokers and e-smokers by implementing control variables in the system of equations. There are four control variables added to the model, namely $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, and $u_4(t)$ with the control variables $u_1(t)$ and $u_2(t)$ representing the implementation of education to people who have the potential to smoke, and the dangers of being a passive smoker among conventional smokers or electronic smokers. Meanwhile, controls $u_3(t)$ and $u_4(t)$ representing knowledge about the benefits or positive things that will be obtained if stop smoking conventionally or electronically. Based on the model that has been constructed, the implementation of optimal control can reduce the number of populations who actively smoke conventional or electronic smokers. The process of solving mathematical models of optimal control problems is carried out by using the Pontryagin minimum principle, and the objective function is in Lagrange form. The results of the analysis of equations show that the model is optimal if it holds to the state criteria, costate criteria and stationary criteria. Furthermore, to support the main results of the analysis that has been carried out, the numerical approach or simulation is demonstrated with Matlab software. The final part of the research shows that the simulation results strengthen the analysis results, namely that the control variables and weights applied to the model are able to minimize the number of active populations as conventional or electric smokers.

Keywords: mathematical modeling, conventional smokers, electronic smokers, optimal control, pontryagin's principle, numerical simulation

Received :31-08-2023, Revised :09-01-2024, Accepted :27-01-2024

1. Pendahuluan

Merokok telah dikenal sejak zaman dahulu sebagai salah satu kebiasaan buruk yang memiliki dampak serius terhadap kesehatan manusia. Aktivitas merokok melibatkan penghirupan asap yang dihasilkan dari pembakaran produk tembakau, yang mengandung berbagai zat kimia beracun dan berbahaya. Sejak pertama kali tembakau diperkenalkan oleh bangsa Eropa pada abad ke-16, merokok telah menjadi pandemi global yang mengancam kesehatan publik. Semakin meningkatnya prevalensi perilaku merokok di seluruh dunia saat ini, dengan efek dari paparan tembakau aktif menyebabkan kematian hampir lebih lima juta manusia per tahun dari belahan dunia, jumlah ini bahkan melebihi angka kematian dari pandemi lainnya seperti tuberculosis, HIV/AIDS, dan malaria. Sebagai upaya untuk membantu para perokok berhenti dari kebiasaan merokok, WHO telah memperkenalkan berbagai terapi pengganti nikotin (NRT), termasuk rokok elektrik. *Electronic Nicotine Delivery System* adalah jenis rokok elektrik yang dikenalkan dari permulaan tahun 2003, dan telah diizinkan oleh WHO penggunaannya di awal tahun 2004 [1].

Sebuah survei yang telah dilakukan terhadap 216 responden dengan karakteristik yang berbeda-beda untuk mengevaluasi efektivitas rokok elektrik, sebagai salah satu cara untuk mengurangi kebiasaan merokok pada masyarakat. Hasil penelitian menunjukkan sekitar 66,8% dari seluruh responden melaporkan berhasil mengurangi penggunaan rokok konvensional setelah terapi dengan rokok elektrik, dan sekitar 48,8% berhasil berhenti merokok setelah beberapa waktu. Selain itu, hasil yang menggembirakan bahwa dengan teknik penggunaan rokok elektrik lebih dari 20 kali dalam waktu sehari sangat berkorelasi positif, dan hampir 70% dapat berhenti dari kebiasaan merokok [2]. Selanjutnya, informasi-informasi pendukung penelitian sebelumnya yang telah mengkaji fenomena interaksi perokok dalam model, diantaranya penelitian yang mengembangkan model matematika tentang penyebaran aktivitas merokok dengan melibatkan kebijakan kampanye media sebagai inovasi mengurangi subpopulasi perokok aktif. Model ini terdapat empat variabel subpopulasi yang terlibat yaitu subpopulasi tidak merokok, subpopulasi yang aktif merokok, subpopulasi yang telah berhenti dari aktivitas merokok, dan subpopulasi yang terpengaruh atau terdampak akibat dari kebijakan kampanye media. Penelitian ini menunjukkan bahwa semakin tinggi tingkat pemahaman atau kesadaran serta semakin besar kegiatan kampanye media mampu mengurangi jumlah populasi yang aktif merokok [3].

Selain penelitian di atas, terdapat penelitian yang merekonstruksi model matematika sebagai ranah evaluasi dalam pengontrolan jumlah perokok aktif dengan metode menciptakan tempat khusus bagi perokok aktif dan meningkatkan harga rokok [4]. Berdasarkan analisis sensitivitas, hasil penelitian menunjukkan bahwa metode yang efektif mengendalikan jumlah perokok adanya peningkatan harga rokok. Oleh karena itu, perlunya sutaу langkah atau teknik untuk mengendalikan atau mengontrol masalah perokok supaya tidak meningkat dari seseorang yang akan berpotensi menjadi perokok aktif. Adapun, beberapa penelitian yang telah mengkaji dan mengimplementasikan teori kontrol optimal, yaitu penelitian Hakim, dkk. dalam masalah pengendalian pandemi penyakit kolera [5]. Marsudi, dkk. mengkaji dan menganalisis masalah kontrol optimal yang diterapkan dengan dalam bentuk model matematika untuk penyakit HIV [6]. Pada tahun 2019, Yosyingyoung dan Viriyapong mengkaji tentang implementasi teori kontrol optimal dalam memperhatikan perilaku penyebaran penyakit Hepatitis B [7]. Sedangkan tahun 2020, Kristanti, memaparkan tentang analisis kontrol optimal dalam pengendalian kanker servik [8]. Sedangkan kajian *update* tentang implementasi teori prinsip pontryagin pada masalah kontrol optimal dalam menganalisis dan mengendalikan pandemi Covid-19 [9], [10], dan penelitian Hakim, (2022) yang mengkaji teori masalah kontrol sebagai aktivitas pengendalian penyebaran Covid-19 dengan mempertimbangkan kebijakan karantina serta penggunaan masker [11]. Selain itu, implementasi kontrol optimal digunakan untuk pengendalian penyakit campak [12], [13].

Memperhatikan dan berasumsi pada beberapa fakta dari hasil penelitian sebelumnya, sehingga terdapatnya peluang yang besar untuk mengkaji masalah kontrol optimal pada model interaksi antar subpopulasi perokok. Besar harapannya, hasil dari penelitian mampu memberikan beberapa skema-skema atau skenario tentang kebijakan-kebijakan dalam mengurangi subpopulasi perokok aktif dengan

pendekatan teori, analisis, dan simulasi dari model matematika. Sistematika penulisan terbagi menjadi beberapa bagian, yaitu (I) pendahuluan, (II) landasan teori sebagai pendukung analisis, (III) metode, (IV) hasil dan pembahasan, dan bagian (V) memaparkan kesimpulan.

2. Landasan Teori

2.1 Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial merupakan suatu persamaan matematika yang mengandung beberapa turunan dari variabel-variabel terikatnya terhadap variabel bebasnya [14].

2.2 Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa (PDB) merupakan suatu persamaan matematika yang mengandung turunan dari satu atau beberapa variabel terikat terhadap satu variabel bebasnya. Persamaan diferensial biasa secara umum terbagi menjadi PDB linear dan PDB nonlinear. PDB nonlinear merupakan suatu persamaan diferensial biasa dengan kondisi variabel terikatnya atau turunannya memiliki orde lebih dari satu atau adanya unsur perkalian antara variabel terikat dan turunannya [14].

2.3 Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Bentuk umum sistem persamaan diferensial biasa dengan memiliki n dimensi, yaitu [14]:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{aligned} \tag{1}$$

dengan $a_{ij}(t)$ dan $i = 1, 2, \dots, n$; $j = 1, 2, \dots, n$ merupakan koefisien yang terikat oleh variabel bebas t .

2.4 Teori Kontrol Optimal

Konsep kontrol optimal merupakan suatu usaha dalam mendapatkan kondisi-kondisi yang sesuai dan optimal untuk fungsi tujuan yang telah dikonstruksi. Klasifikasi kontrol optimal dapat ditinjau dari kondisi sistem persamaan kendala (*constrain*). Misalnya sistem kendala dalam bentuk persamaan stokastik, bentuk persamaan diferensial biasa, persamaan disrit, ataupun persamaan diferensial parsial. Selanjutnya masalah kontrol optimal dengan kendala sistem PDB dapat direpresentasikan dalam bentuk berikut: misal $x(t)$ merepresentasikan variabel *state* dan $u(t)$ sebagai variabel kontrol, maka persamaan *state* dari yang bergantung dengan waktu t dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{dx(t)}{dt} = k(t, x(t), u(t))$, dan domain $u(t) \in U$ untuk $0 \leq t \leq T$, dimana $U = \{u(t) | 0 \leq u(t) \leq L\}$. Sehingga, konsep kontrol optimal merupakan suatu usaha untuk mendapatkan suatu nilai $u^*(t)$ yang akan mengoptimalkan tujuan [15].

2.5 Beberapa Bentuk Fungsi Tujuan

Boltyanski dan Poznyak mengenalkan tiga bentuk fungsi tujuan yang dapat diterapkan dalam masalah kontrol optimal [15], yaitu:

1. Bentuk Bolza merupakan fungsi tujuan yang berbentuk sebagai berikut:

$$J(u(t)) = h[T, x(T)] + \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt \tag{2}$$

dimana h dan g adalah fungsi yang kontinu.

2. Bentuk Lagrange merupakan fungsi tujuan dari hasil modifikasi bentuk Bolza, yaitu dengan menetapkan nilai $h[T, x(T)] = 0$, sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut:

$$J(u(t)) = \int_0^T f(t, x(t), u(t)) dt \quad (3)$$

3. Bentuk Mayer merupakan fungsi tujuan dari hasil modifikasi bentuk Bolza, yaitu dengan mengasumsikan nilai dari $\int_0^T f(x(t), u(t), t) dt = 0$, oleh karena itu didapatkan sebagai berikut:

$$J(u(t)) = h[T, x(T)] \quad (4)$$

2.6 Prinsip Minimum Pontryagin

Prinsip minimum Pontryagin (*minimum principle Pontryagin*) merupakan kriteria yang dapat diterapkan untuk mencapai atau menuju solusi untuk masalah kontrol optimal terhadap fungsi tujuan yang telah dibentuk. Berikut langkah yang dapat ditempuh untuk mengimplementasikan prinsip pontryagin [16].

1. Membentuk fungsi Hamiltonian

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = f(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)k(t, x(t), u(t)). \quad (5)$$

2. Menentukan kondisi stasioner sebagai berikut:

$$\frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial u} = 0, \quad (6)$$

sehingga diperoleh nilai $u^* = u^*(t, x(t), \lambda(t))$.

3. Menerapkan kondisi stasioner pada fungsi Hamiltonian.

$$H^*(t, x(t), \lambda(t)) = H(t, x(t), u^*(t, x(t), \lambda(t)), \lambda(t)) \quad (7)$$

4. Menentukan persamaan *state* dan *costate*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial \lambda} \quad (\text{state})$$

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \frac{\partial H(t, x(t), u(t), \lambda(t))}{\partial x} \quad (\text{costate})$$

dengan syarat transversal $\lambda(T) = 0$.

5. Substitusi hasil dari langkah 4 pada variabel u^* untuk mendapatkan nilai atau kondisi yang optimal.

3. Metode

Penelitian ini mengadopsi model matematika yang telah diteliti oleh Jung, dkk. pada tahun 2018 tentang interaksi perokok. Dimana kompartemen dikonstruksi dengan membagi menjadi empat klasifikasi, yaitu subpopulasi yang potensial merokok (P), subpopulasi yang merokok secara konvensional (S), subpopulasi perokok elektrik (E), dan subpopulasi yang terakhir adalah telah berhenti dari aktivitas merokok (Q). Mengacu pada beberapa fakta yang telah diungkapkan pada latar belakang, maka konsep atau teknik yang digunakan untuk mengontrol subpopulasi perokok dapat dijelaskan sebagai berikut. Salah satu konsep kontrol yang diusulkan peneliti dalam pengontrolan terhadap perokok konvensional dan elektrik dengan mempertimbangkan beberapa skenario berikut, yaitu pemberian edukasi atau pemahaman terhadap perokok potensial tentang bahayanya menjadi perokok pasif ketika berinteraksi dengan perokok konvensional ($u_1(t)$) atau elektrik ($u_2(t)$). Selain itu, konsep kampanye atau edukasi tentang pentingnya dan manfaatnya yang akan diperoleh ketika seseorang berhenti dari aktivitas merokok secara konvensional ($u_3(t)$), ataupun berhenti dari merokok secara elektrik ($u_4(t)$).

1. Selanjutnya, analisis matematis dan simulasi masalah kontrol optimal dalam rangka mengurangi populasi perokok konvensional dan elektrik dapat diuraikan dengan langkah-langkah berikut:
2. Merekonstruksi model interaksi perokok konvensional dan perokok aktif dengan menambahkan variabel kontrol $u(t)$.
3. Mendefinisikan fungsi tujuan (*objective*) yang bertujuan untuk mengurangi atau meminimumkan jumlah populasi perokok konvensional dan perokok aktif.
4. Menentukan kondisi atau kriteria penting dalam masalah kontrol optimal, diantaranya kriteria stasioner, kriteria *state*, dan kriteria *costate*.
5. Dilakukan simulasi numerik dengan bantuan *software* Matlab sebagai pendukung secara visual terhadap hasil analisis matematis.

4. Hasil dan Pembahasan

Pada bagian ini, hasil penelitian harus dijelaskan secara jelas dan singkat serta mampu menjawab atau mendapatkan solusi dari permasalahan dan tujuan yang termuat di bagian pendahuluan. Data yang telah diolah disajikan dalam bentuk tabel, grafik, diagram, gambar yang disertai dengan keterangan yang jelas.

4.1 Konstruksi Model dengan Melibatkan Variabel Kontrol

Berdasarkan model interaksi perokok konvensional dan elektrik pada penelitian Jung, dkk. (2018), dan mengacu pada skenario pengontrolan yang telah dipaparkan pada bagian metode, maka model Jung, dkk. (2018) dapat dimodifikasi menjadi sistem persamaan dengan variabel kontrol sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{dP(t)}{dt} &= \mu - (1 - u_1(t))\beta_1 P(t)S(t) - \mu P(t) \\
 \frac{dS(t)}{dt} &= (1 - u_1(t))\beta_1 P(t)S(t) + (1 - u_2(t))\beta_2 S(t)Q(t) + \alpha E(t) - (\gamma_1 + g + \mu)S_1(t) \\
 &\quad - u_3(t)S(t) \\
 \frac{dE(t)}{dt} &= gS(t) - (\alpha + \gamma_2 + \mu)E(t) - u_4(t)E(t) \\
 \frac{dQ(t)}{dt} &= (\gamma_1 + \gamma_2)S(t) - (1 - u_2(t))\beta_2 S(t)Q(t) - \mu Q(t).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Representasi parameter yang terlibat pada model persamaan (8) dapat ditunjukkan pada Tabel 1 berikut:

Tabel 1. Parameter

Parameter	Keterangan
μ	Laju kelahiran dan kematian
β_1	Laju seseorang berpotensi untuk aktif dalam merokok secara konvensional
β_2	Laju seseorang kembali aktif merokok secara konvensional setelah berhenti
γ_1	Laju seseorang berhenti dari merokok secara konvensional
γ_2	Laju seseorang berhenti dari merokok elektrik
α	Laju perpindahan dari perokok elektrik menjadi aktivitas merokok konvensional
g	Laju perokok konvensional menjadi perokok elektrik

4.2 Fungsi Lagrange

Tahap selanjutnya menentukan fungsi *objective* yang sesuai dengan tujuan untuk mengurangi atau meminimumkan subpopulasi perokok konvensional dan perokok elektrik, serta memperkecil biaya dan usaha dalam pemberian edukasi terhadap interaksi perokok potensial dengan perokok konvensional ($u_1(t)$) dan perokok elektrik ($u_2(t)$). Selain itu, untuk meminimumkan biaya kampanye untuk berhentinya para perokok konvensional ($u_3(t)$) dan perokok elektrik ($u_4(t)$). Dengan demikian berdasarkan pada formulasi fungsi Lagrange didapatkan bentuk fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)) = \int_0^T S(t) + E(t) + Au_1^2(t) + Bu_2^2(t) + Cu_3^2 + Du_4^2 dt. \quad (9)$$

Dimana bobot A, B, C , dan D yang berkorelasi dengan biaya atau usaha dalam mencapai fungsi tujuan (9) merupakan suatu bobot penyeimbang terhadap variabel-variabel kontrol. Adapun langkah selanjutnya, yaitu menentukan kontrol optimal $u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t)$ dan $u_4^*(t)$, sedemikian sehingga berlaku domain kontrol fungsi tujuan sebagai berikut:

$$J(u_1^*(t), u_2^*(t), u_3^*(t), u_4^*(t)) = \min\{J(u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)) \in U\},$$

$$\text{dengan } U = \{(u_i(t)) \mid 0 \leq u_i(t) \leq 1, i = 1, 2, 3, 4\}.$$

4.3 Kondisi Stasioner, State, dan Costate

Berdasarkan teori yang telah dipaparkan pada landasan teori, maka masalah kontrol optimal dapat diperoleh dengan menerapkan prinsip minimum Pontryagin. Langkah pertama yang dilakukan dengan membentuk fungsi Hamiltonian, dan berdasarkan pada persamaan (8) dan (9), maka diperoleh fungsi hamiltonial sebagai berikut:

$$\begin{aligned} H = & S(t) + E(t) + Au_1^2(t) + Bu_2^2(t) + Cu_3^2(t) + Du_4^2(t) \\ & + \lambda_P(\mu - (1 - u_1(t))\beta_1 P(t)S(t) - \mu P(t)) \\ & + \lambda_S \left((1 - u_1(t))\beta_1 P(t)S(t) + (1 - u_2(t))\beta_2 S(t)Q(t) + \alpha E(t) - (\gamma_1 + g + \mu)S_1(t) \right. \\ & \quad \left. - u_3(t)S(t) \right) \\ & + \lambda_E(gS(t) - (\alpha + \gamma_2 + \mu)E(t) - u_4(t)E(t)) + \lambda_Q((\gamma_1 + \gamma_2)S(t) - \beta_2 S(t)Q(t) - \mu Q(t)), \end{aligned} \quad (10)$$

dimana variabel $\lambda_P, \lambda_S, \lambda_E$, dan λ_Q disebut sebagai variabel-variabel *costate*. Langkah selanjutnya, agar diperoleh solusi yang optimal maka ketika fungsi Hamiltonian (10) memenuhi dengan kondisi stasioner, kondisi *state*, dan kondisi *costate*.

1. Kondisi stasioner dapat diperoleh dengan cara fungsi Hamiltonian dideferensialkan terhadap variabel-variabel kontrol yang ada, dan diperoleh sebagai berikut:

$$\frac{\partial H}{\partial u_1(t)} = 0 \Leftrightarrow 2Au_1(t) + \lambda_P\beta_1 P(t)S(t) - \lambda_S\beta_1 P(t)S(t) = 0, \quad (11)$$

berdasarkan persamaan (11), maka diperoleh nilai kontrol $u_1(t)$ sebagai berikut:

$$u_1(t) = \frac{(\lambda_S - \lambda_P)\beta_1 P(t)S(t)}{2A}.$$

Dikarenakan $u_1(t)$ merupakan suatu nilai proporsi, maka nilai variabel kontrol selalu terletak pada rentang $0 \leq u_1(t) \leq 1$, dan solusi optimal untuk $u_1^*(t)$ adalah:

$$u_1^*(t) = \begin{cases} 0, & u_1(t) \leq 0 \\ u_1(t), & 0 < u_1(t) < 1 \\ 1, & u_1(t) \geq 1, \end{cases}$$

sehingga, nilai $u_1^*(t)$ dapat dimodifikasi dalam bentuk

$$u_1^*(t) = \min \left\{ \max \left(0, \frac{(\lambda_S - \lambda_P)\beta_1 P(t)S(t)}{2A} \right), 1 \right\}.$$

Analog dengan proses penentuan nilai variabel kontrol $u_1^*(t)$ pada persamaan (11), maka diperoleh juga untuk nilai-nilai variabel kontrol yang lain sebagai berikut:

$$\begin{aligned} u_2^*(t) &= \min \left\{ \max \left(0, \frac{(\lambda_S - \lambda_Q)S(t)Q(t)}{2B} \right), 1 \right\} \\ u_3^*(t) &= \min \left\{ \max \left(0, \frac{\lambda_S S(t)}{2C} \right), 1 \right\} \\ u_4^*(t) &= \min \left\{ \max \left(0, \frac{\lambda_E E(t)}{2D} \right), 1 \right\}. \end{aligned} \tag{12}$$

2. Adapun kondisi *state* merupakan sistem persamaan kendala, sehingga secara mudahnya diperoleh persamaan *state* berikut:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\lambda_P} &= \frac{dP(t)}{dt} = \mu - (1 - u_1(t))\beta_1 P(t)S(t) - \mu P(t) \\ \frac{dH}{d\lambda_S} &= \frac{dS(t)}{dt} = (1 - u_1(t))\beta_1 P(t)S(t) + (1 - u_2(t))\beta_2 S(t)Q(t) + \alpha E(t) \\ &\quad - (\gamma_1 + g + \mu)S_1(t) - u_3(t)S(t) \\ \frac{dH}{d\lambda_E} &= \frac{dE(t)}{dt} = gS(t) - (\alpha + \gamma_2 + \mu)E(t) - u_4(t)E(t) \\ \frac{dH}{d\lambda_Q} &= \frac{dQ(t)}{dt} = (\gamma_1 + \gamma_2)S(t) - (1 - u_2(t))\beta_2 S(t)Q(t) - \mu Q(t), \end{aligned} \tag{13}$$

dengan kondisi awal $P(0) = P_0$, $S(0) = S_0$, $E(0) = E_0$, dan $Q(0) = Q_0$.

3. Sedangkan kondisi atau persamaan *costate* dapat diperoleh dengan mengalikan nilai negatif satu dengan hasil turunan fungsi Hamiltonian terhadap variabel-variabel *state*, yaitu:

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_P}{dt} &= -\frac{dH}{dP(t)} = \lambda_P((1 - u_1)\beta_1 S(t) + \mu) - \lambda_S((1 - u_1)\beta_1 S(t)) \\ \frac{d\lambda_S}{dt} &= -\frac{dH}{dS(t)} \\ &= -1 + \lambda_P((1 - u_1)P(t)) - \lambda_S((1 - u_2)\beta_2 Q(t) - \gamma_1 - g - \mu - u_3) \\ &\quad - \lambda_E g - \lambda_Q(\gamma_1 + \gamma_2 - (1 - u_2)\beta_2 Q(t)) \\ \frac{d\lambda_E}{dt} &= -\frac{dH}{dE(t)} = -1 - \lambda_S \alpha + \lambda_Q(\alpha + \gamma_2 + \mu + u_4) \end{aligned} \tag{14}$$

$$\frac{d\lambda_Q}{dt} = -\frac{dH}{dQ(t)} = -\lambda_S((1 - u_2)\beta_2 S(t)) - \lambda_Q((1 - u_2)\beta_2 S(t)) + \mu$$

dengan kondisi transversal berikut $\lambda_P(T) = \lambda_S(T) = \lambda_E(T) = \lambda_Q(T) = 0$.

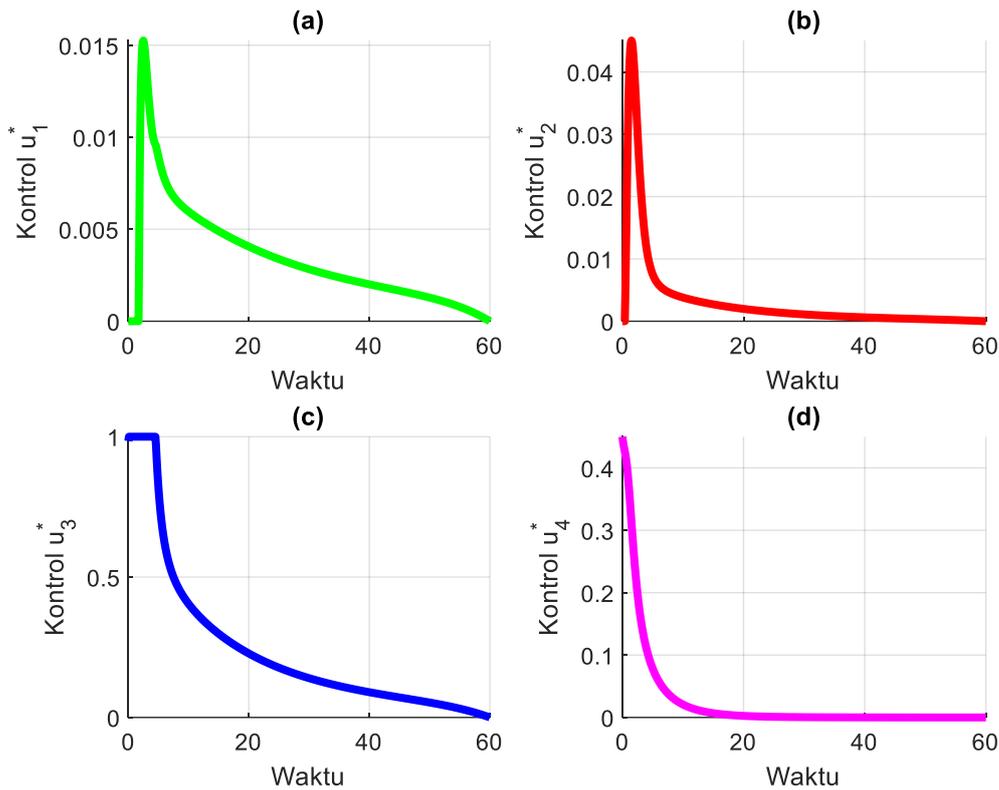
4.4 Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan dengan berbantuan *software* Matlab, sebagai salah satu langkah untuk memperkuat hasil analisis matematis bahwa variabel kontrol dapat meminimumkan subpopulasi perokok konvensional dan perokok elektrik. Kemudian untuk merepresentasikan suatu perilaku solusi dari model matematika interaksi antara perokok konvensional dan perokok elektrik dalam simulasi numerik menggunakan nilai awal $P(0) = 15$, $S(0) = 5$, $E(0) = 2$, $Q(0) = 1$, dan nilai bobot kontrol yang digunakan sebagai penyeimbang terhadap variabel-variabel kontrol sebesar $A = 0.5$, $B = 0.25$, $C = 2.5$, dan $D = 0.75$. Pemilihan nilai bobot ini bertujuan sebagai penyeimbang agar nilai dari kontrol yang diterapkan selalu berada pada rentang batas *threshold*, yaitu nol hingga satu. Selain itu, bobot mampu menjadi penyeimbang terhadap biaya yang akan dikeluarkan agar tidak terlalu tinggi atau banyak. Adapun besaran nilai parameter yang digunakan pada simulasi mengacu pada Tabel 2 di bawah ini:

Tabel 2. Nilai Parameter

Parameter	Nilai	Referensi
μ	$\frac{1}{79,8}$	[1]
β_1	0,1961	[1]
β_2	0,04	[1]
γ_1	0,0772	[1]
γ_2	0,1008	[1]
α	0,0822	[1]
g	0,1245	[1]

Berdasarkan implementasi nilai awal, nilai bobot dan nilai parameter pada Tabel 2, maka hasil simulasi numerik ditunjukkan pada Gambar 1 yang terdapat pada halaman selanjutnya. Gambar 1 bagian (a), (b) dan (d) merepresentasikan perjalanan solusi variabel kontrol $u_1(t)$, $u_2(t)$, dan $u_4(t)$ yang diterapkan pada sistem, sedangkan Gambar 1 bagian (c) menggambarkan perjalanan solusi untuk variabel kontrol $u_3(t)$. Terlihat dari keempat perjalanan solusi variabel kontrol bergantung dan berkorelasi dengan nilai bobot yang diberikan, dimana semakin besar bobot yang diberikan maka *effort* kontrol yang diberikan juga besar dari awal waktu dan akan berkurang dengan berjalannya waktu simulasi. Hal ini diperkuat dengan hasil simulasi pada Gambar 1 bagian (c), yaitu variabel kontrol $u_3(t)$ yang berbanding lurus dengan nilai bobot C . Sedangkan pemberian bobot yang relative kecil akan berkorelasi lurus dengan *effort* kontrol yang akan diterapkan pada proses pengontrolan, hal ini ditunjukkan dari grafik kontrol $u_1(t)$, $u_2(t)$, dan $u_3(t)$ tidak sebesar dibandingkan dengan besar kontrol dari variabel $u_3(t)$. Oleh karena itu, pemilihan besar bobot yang berkorelasi dengan variabel-variabel kontrol harus diperhatikan agar didapatkan kondisi yang sesuai dengan harapan yang sesuai dengan *objective function*.

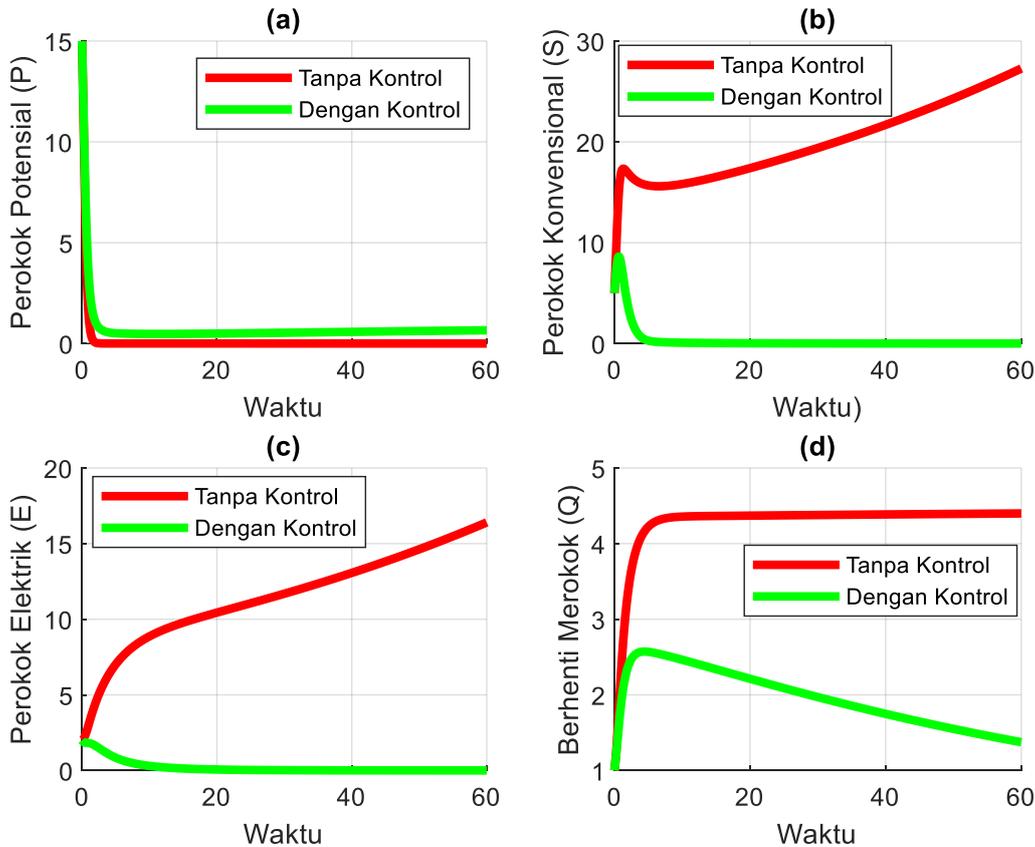


Gambar 1. Perilaku Perjalanan Solusi Variabel-Variabel Kontrol

Selanjutnya Gambar 2 merupakan hasil simulasi yang menunjukkan tentang perjalanan solusi sistem sebelum dan setelah diterapkan variabel kontrol. Gambar 2 bagian (a) terlihat bahwa subpopulasi perokok potensial setelah dikontrol terlihat lebih meningkat dibandingkan tanpa adanya proses pengontrolan, meskipun hasil simulasi memperlihatkan perubahan populasi perokok potensial tidak begitu berubah terlalu signifikan. Perihal ini, menandakan adanya transmisi atau perpindahan subpopulasi potensial untuk menjadi perokok konvensional atau perokok elektrik. Jelas pada Gambar 2, bagian (b) dan (c) memperlihatkan bahwa proses pengontrolan berjalan dengan baik, dikarenakan subpopulasi perokok konvensional dan perokok elektrik dapat ditekan mulai dari awal waktu hingga akhir simulasi, yaitu waktu ke-60. Keadaan ini menandakan bahwa variabel-variabel kontrol yang diterapkan terlihat efektif dalam rangka mengurangi jumlah subpopulasi yang aktif sebagai perokok konvensional atau perokok elektrik. Dengan demikian, kondisi simulasi yang dihasilkan telah sesuai dengan fungsi tujuan yang dibentuk, yaitu untuk mengurangi total populasi perokok konvensional dan perokok elektrik untuk berhenti dari aktivitas merokok.

Oleh karena itu, korelasi positif yang dapat diambil dalam kebijakan, yaitu penggalakan pemberian edukasi tentang informasi atau bahayanya menjadi perokok pasif mampu memberikan efek atau imbas yang baik dalam mengurangi subpopulasi perokok, dan banyaknya kemanfaatan yang diperoleh jika tidak berinteraksi dengan perokok aktif. Berbeda halnya Gambar 2, bagian (d) memberikan suatu kabar kurang mengembirakan karena variabel kontrol $u_3(t)$ dan $u_4(t)$ tidak mampu menekan secara signifikan mulai dari awal waktu simulasi, meskipun dengan berjalannya waktu subpopulasi yang berhenti dari perokok konvensional atau elektrik menurun dengan adanya penerapan kontrol. Hal ini, mengindikasikan bahwa variabel kontrol yang diterapkan memang mampu mengontrol akan tetapi tidak seefektif kontrol $u_1(t)$ dan $u_2(t)$. Oleh karena itu, implementasi variabel kontrol $u_3(t)$ dan $u_4(t)$, dapat dikorelasikan dengan suatu kebijakan bahwa kampanye untuk berhenti merokok atau usaha edukasi tentang bahaya merokok

dapat digalakkan atau digencar-gencarkan agar mampu mengurangi total perokok aktif. Selain itu, kampanye tentang manfaat untuk hidup sehat tanpa rokok, baik rokok konvensional maupun rokok elektrik dapat dilakukan dalam rangka meningkatkan kehidupan populasi yang lebih sehat bebas merokok.



Gambar 2. Perilaku Solusi Model Interaksi Perokok Tanpa Kontrol dan Dengan Kontrol

5. Kesimpulan

Penelitian yang telah dilakukan menghasilkan model matematika interaksi perokok konvensional dan elektrik dengan melibatkan variabel kontrol. Implementasi kontrol optimal ini dengan tujuan untuk mengurangi total populasi perokok aktif secara konvensional atau perokok aktif elektrik. Analisis sistem yang dilakukan dengan menerapkan teori minimum pontryagin dengan fungsi tujuan yang digunakan berbentuk Lagrange, sehingga diperoleh kriteria-kriteria optimal pada sistem. Selanjutnya, hasil simulasi numerik yang telah dilakukan memperlihatkan efektivitas dari variabel-variabel kontrol yang digunakan sangat bagus dalam proses pengontrolan, akan tetapi besarnya kontrol yang diberikan bergantung dengan nilai bobot yang berkorelasi dengan variabel kontrol. Meskipun demikian, hasil simulasi telah menunjukkan kesesuaian dengan fungsi tujuan yang dibentuk, yaitu adanya penurunan populasi dari perokok konvensional dan perokok elektrik. Oleh karena itu, representasi dari variabel kontrol yang digunakan pada model dapat dijadikan sebagai landasan bagi penentu kebijakan dalam menciptakan lingkungan yang terbebas dari polusi asap rokok.

Referensi

- [1] J. H. Jung, A. Park, and I. H. Jung, "Qualitative and Sensitivity Analysis of the Effect of Electronic Cigarettes on Smoking Cessation," *Comput. Math. Methods Med.*, vol. 2018, 2018, doi: 10.1155/2018/3738584.
- [2] M. B. Siegel, K. L. Tanwar, and K. S. Wood, "Electronic cigarettes as a smoking-cessation tool:

- Results from an online survey,” *Am. J. Prev. Med.*, vol. 40, no. 4, pp. 472–475, 2011, doi: 10.1016/j.amepre.2010.12.006.
- [3] A. Sharma and A. K. Misra, “Backward bifurcation in a smoking cessation model with media campaigns,” *Appl. Math. Model.*, vol. 39, no. 3–4, pp. 1087–1098, 2015, doi: 10.1016/j.apm.2014.07.022.
- [4] L. Pang, Z. Zhao, S. Liu, and X. Zhang, “A mathematical model approach for tobacco control in China,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 259, pp. 497–509, 2015, doi: 10.1016/j.amc.2015.02.078.
- [5] L. Hakim, T. Trisilowati, and I. Darti, “Optimal Control of a Cholera Disease Model with Vaccination,” *Int. J. Appl. Math. Stat.*, vol. 53, no. 4, pp. 65–72, 2015.
- [6] M. Marsudi, N. Hidayat, and R. B. E. Wibowo, “Application of Optimal Control Strategies for the Spread of HIV in a Population,” *Res. J. Life Sci.*, vol. 4, no. 1, pp. 1–9, 2017, doi: 10.21776/ub.rjls.2017.004.01.1.
- [7] P. Yosyingyong and R. Viriyapong, “Global stability and optimal control for a hepatitis B virus infection model with immune response and drug therapy,” *J. Appl. Math. Comput.*, vol. 60, no. 1–2, pp. 537–565, 2019, doi: 10.1007/s12190-018-01226-x.
- [8] K. T. Kristanti, T. Trisilowati, and A. Widodo, “Optimal Control of Cervical Cancer Model with Vaccination and Screening,” *J. Exp. Life Sci.*, vol. 10, no. 2, pp. 72–78, 2020, doi: 10.21776/ub.jels.2020.010.02.01.
- [9] M. A. Acuña-Zegarra, S. Díaz-Infante, D. Baca-Carrasco, and D. Olmos-Liceaga, “COVID-19 Optimal Vaccination Policies: A Modeling Study on Efficacy, Natural and Vaccine-Induced Immunity Responses,” *Math. Biosci.*, vol. 337, no. April, p. 108614, 2021, doi: 10.1016/j.mbs.2021.108614.
- [10] L. Hakim, “A Pontryagin Principle and Optimal Control of Spreading Covid-19 With Vaccination and Quarantine Subtype,” *Commun. Math. Biol. Neurosci.*, vol. 2023, pp. 1–28, 2023, doi: 10.28919/cmbn/8157.
- [11] L. Hakim, “Multiple Strategis as Optimal control of a Covid-19 Disease With Quarantine and Using Health Masks,” *Barekeng J. Imu Mat. dan Terap.*, vol. 16, no. 3, pp. 1059–1068, 2022, doi: <https://doi.org/10.30598/barekengvol16iss3pp1059-1068>.
- [12] R. Viriyapong and W. Ridbamroong, “Global Stability Analysis and Optimal Control of Measles Model with Vaccination and Treatment,” *J. Appl. Math. Comput.*, vol. 62, no. 1–2, pp. 207–237, 2020, doi: 10.1007/s12190-019-01282-x.
- [13] L. Hakim, “Strategi Kontrol Optimal Model SIQR pada Penyebaran Penyakit Campak,” *Leibniz J. Mat.*, vol. 2, no. 2, pp. 65–76, 2022, [Online]. Available: <https://ejurnal.unisap.ac.id/index.php/leibniz/issue/view/18>.
- [14] D. H. Trahan, W. E. Boyce, and R. C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.*, vol. 86, no. 7. 1979.
- [15] S. Lenhart and J. T. Workman, *Optimal Control Applied to Biological Models.* 2007.
- [16] L. C. Evans, “An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory Version.2,” in *Department of Mathematics, University of California, Berkeley*, vol. 2, 2009, pp. 1–126.

