JOMTA
Journal of Mathematics: Theory and Applications
Vol. 6, No. 1, 2024, pp. 1 – 7

p-ISSN: 2685-9653 e-ISSN: 2722-2705
DOI: 10.31605/jomta.v6i1.3096

Symplectic Form yang Berkaitan dengan Satu-*form* Suatu Aljabar Lie Berdimensi Rendah

Edi Kurniadi[1*]

[1] *Program Studi Sarjana Matematika, Universitas Padjadjaran, Sumedang, 45363, Indonesia*

Corresponding Email:* [1]edi.kurniadi@unpad.ac.id

Abstrak

Dalam artikel ini dipelajari *symplectic form* suatu aljabar Lie berdimensi kecil. *Symplectif form* sangat penting dalam mengklasifikasikan tipe-tipe aljabar Lie. Berdasarkan dimensi dan syarat-syarat tertentu yang harus dipenuhi, terdapat dua tipe aljabar Lie. Aljabar Lie berdimensi ganjil dinamakan aljabar Lie kontak dan aljabar Lie berdimensi genap dinamakan aljabar Lie Frobenius. Suatu aljabar Lie berdimensi ganjil yang dilengkapi dengan satu-*form* α sedemikian sehingga $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^n \neq 0$ disebut aljabar Lie kontak, sedangkan aljabar Lie berdimensi genap dengan indeksnya sama dengan nol dinamakan aljabar Lie Frobenius. Penelitian ini bertujuan untuk memberikan formula *symplectic form* secara eksplisit bagi aljabar Lie kontak dan aljabar Lie Frobenius. Dalam penelitian ini, diperoleh bahwa satu-*form* yang terkait dengan *symplectic form* erat kaitannya dalam menentukan tipe suatu aljabar Lie apakah aljabar Lie kontak atau aljabar Lie Frobenius. Untuk memperjelas hasil yang diperoleh, diberikan beberapa contoh satu-*form* dan *symplectic form* aljabar Lie Frobenius dan aljabar Lie kontak.

Kata Kunci: aljabar Lie kontak, aljabar Lie Frobenius, bilinear *form*, satu-*form*, *symplectic form.*

Abstract

In this paper, we study symplectic form on low dimensional real Lie algebra. A symplectic form is very important in classifying of Lie algebra types. Based on their dimension and certain conditions, there are two types of Lie algebras. A lie algebra with odd dimension endowed with one-form α *such that* $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^n \neq 0$ *is called a contact Lie algebra, while a Lie algebra whose dimension is even and it is endowed with zero index is called a Frobenius Lie algebra. The research aimed to give explicit formula of a symplectic form of low dimensional contact Lie algebras and Frobenius Lie algebras. We established that a one-form associated to simplectic form determine a type of a Lie algebra whether a contact or a Frobenius Lie algebras.To clearer the main results, we give some examples of one-form and symplectic form of Frobenius and contact Lie algebras.*

Keywords: *bilinear form, contact Lie algebra, Frobenius Lie algebra, one-form, symplectic form.*

Received :02-10-2023, Revised :11-12-2023, Accepted :06-01-2024

1. Pendahuluan

Aljabar Lie atas lapangan real $\mathbb{R}$ adalah ruang vektor real yang mempunyai *bracket* Lie yaitu pemetaan *skew* bilinear yang sekaligus memenuhi identitas Jacobi. Teori grup Lie dan aljabar Lie serta teori representasi ke duanya merupakan contoh bentuk nyata interaksi antara bidang ilmu matematika dan Fisika [1]. Contoh lain interaksi antara ke dua bidang ilmu tersebut adalah aljabar Lie Fobenius dan aljabar Lie kontak beserta grup Lie-nya. Khususnya aljabar Lie Frobenius, aljabar Lie ini berkaitan erat dengan persamaan Yang-Baxter klasik atau *Classical Yang-Baxter Equation* (CYBE) ([1], [2]). Di sisi lain terdapat hubungan yang erat antara aljabar Lie kontak dengan aljabar Lie Frobenius. Hubungan tersebut antara lain terkait dengan *symplectic form* antara keduanya. Sifat ini banyak dikembangkan oleh banyak peneliti ([3], [4]).

Kajian mendalam tentang aljabar Lie kontak sudah banyak dilakukan oleh banyak peneliti. Kruglikov mengkaji aljabar Lie kontak terkait hubungan antara *symplectic* dan aljabar Lie kontak beserta aplikasinya dalam persamaan Monge-Amp´ere [5]. Selanjutnya, Rodríguez-Vallarte dan Salgado mempelajari aljabar Lie kontak tak tereduksi berdimensi 5 sebagai suatu *double extension* [6], Alvarez, Rodr´Iguez-Vallarte, dan Salgado mengkaji tentang aljabar Lie kontak yang bersifat nilpotent [3]. Kajian mendalam tentang aljabar Lie Frobenius juga sudah banyak dilakukan oleh banyak peneliti dari berbagai aspek seperti hubungan dengan aljabar Lie kontak dengan *nilradical* yang bersifat komutatif [4], invariant dan semi-invariant aljabar Lie Frobenius [2], $\mathfrak{g}$-quasi Frobenius Lie algebra[7], elemen-elemen utama aljabar Lie Frobenius dan sifat-sifatnya ([8], [9].

Berbeda dengan penelitian-penelitian sebelumnya, dalam artikel ini dipelajari rumus eksplisit *symplectic form* aljabar Lie kontak dan aljabar Lie Frobenius yang terkait dengan satu-*form*-nya. Diberikan contoh aljabar Lie kontak dan aljabar Lie Frobenius, kemudian ditentukan bentuk satu-*form*-nya yang terkait dengan *symplectic-form* secara eksplisit dengan menghitung langsung. Dibuktikan pula bahwa dengan konstruksi tersebut, diperoleh aljabar Lie kontak dan aljabar Lie Frobenius.

2. Landasan Teori

Dalam bab ini, diberikan *review* tentang pemetaan bilinear, satu-*form* atau fungsional linear, *symplectic form,* aljabar Lie Frobenius, dan aljabar Lie kontak. Sebelum membahas pemetaan bilinear, pembaca sudah memahami tentang pemetaan linear antara ruang vektor. Misalkan $\mathfrak{g}$ dan $\mathfrak{B}$ ruang vektor real dan misalkan $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{B}$ suatu pemetaan. Dalam hal ini, ψ dikatakan linear jika untuk setiap $x, y \in \mathfrak{g}$ dan skalar-skalar α dan β berlaku:

$$\psi(\alpha x + \beta y) = \alpha\psi(x) + \beta\psi(y) \qquad (1)$$

Jika $\mathfrak{B} = \mathbb{R}$ maka pemetaan linear ψ ini dikatakan satu-*form* atau fungsional linear. Untuk konsistensi, ke depannya ψ hanya akan dinamakan satu-*form.* Himpunan semua satu-*form* ψ pada $\mathfrak{g}$ dinamakan dengan ruang dual, yaitu dual terhadap ruang vektor $\mathfrak{g}$ dan dinotasikan oleh $\mathfrak{g}^*$. Dengan kata lain,

$$\mathfrak{g}^* = \{\psi \ \ ; \psi : \mathfrak{g} \to \mathbb{R} \text{ adalah satu} - form\} \qquad (2)$$

Jika $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ basis untuk ruang vektor $\mathfrak{g}$ berdimensi hingga maka basis untuk ruang dual $\mathfrak{g}^*$ dinotasikan oleh $B^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots., x_n^*\}$. Hubungan keduanya diberikan oleh:

$$x_i^*\left(x_j\right) = 1, \text{ jika } i = j \text{ dan nol untuk lainnya} \qquad (3)$$

Selanjutnya gagasan pemetaan linear ini diperluas untuk kasus pemetaan bilinear.Secara kasarnya, pemetaan bilinear adalah pemetaan yang setiap komponennya senantiasa linear. Secara formal, definisi pemetaan bilinear diberikan dalam definisi berikut ini:

Definisi 1[10]**.** *Misalkan* $\mathfrak{g}, V,$ *dan* W *ruang vektor real. Pemetaan* $\omega: \mathfrak{g} \times V \ni (u, v) \mapsto \omega(u, v) \in W$ *dikatakan bilinear jika berlaku:*

1. $\omega(u_1 + u_2, v) = \omega(u_1, v) + \omega(u_2, v),$
2. $\omega(u, v_1 + v_2) = \omega(u, v_1) + \omega(u, v_2),$
3. $\omega(\alpha u, v) = \alpha\omega(u, v),$
4. $\omega(u, \beta v) = \beta\omega(u, v)$

$\forall\, u, u_1, u_2 \in \mathfrak{g}, v, v_1, v_2 \in V,$ *skalar-skalar* $\alpha, \beta.$

Dalam hal $\mathfrak{g} = V$ dan $W = \mathbb{R}$, pemetaan bilinear ω dinamakan bilinear-*form* atau dua-*form.* Sifat terkait dengan bilinear-*form* diberikan dalam definisi berikut ini:

Definisi 2[10]**.** *Misalkan* $\mathfrak{g}$ *suatu ruang vektor real. Bilinear-form* $\omega: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ *dikatakan symplectic form jika kondisi-kondisi berikut ini dipenuhi:*

1. ω *skew-symmetric:* $\forall v, w \in \mathfrak{g}, \omega(v, w) = -\omega(w, v);$
2. ω *non-degenerate: jika* $v \in \mathfrak{g}$ *dan* $\omega(v, w) = 0$ *untuk setiap* $w \in \mathfrak{g}$, *maka* $v = 0.$

Pasang ruang vektor $\mathfrak{g}$ *dan symplectic-nya dinotasikan oleh* $(\mathfrak{g}, \omega)$ *dinamakan ruang symplectic.*

Salah satu operasi pada satu-*form* ini adalah hasil kali *wedge* dinotasikan oleh $\wedge$ dan didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3[10]**.** *Misalkan* $\mathfrak{g}$ *ruang vektor real dengan basis* $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. *Misalkan* $B^* = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$ *basis untuk ruang dual* $\mathfrak{g}^*$. *Maka untuk semua* $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, *didefiniskan* k*-form pada* $\mathfrak{g}$ *oleh* $x_{i_1}^* \wedge x_{i_2}^* \wedge \dots \wedge x_{i_k}^*$ *dan diberikan sebagai berikut*:

$$\left(x_{i_1}^* \wedge x_{i_2}^* \wedge \dots \wedge x_{i_k}^*\right)(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} x_{i_1}^*(a_1) & \dots & x_{i_1}^*(a_k) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{i_k}^*(a_1) & \dots & x_{i_k}^*(a_k) \end{vmatrix} \quad (4)$$

Untuk setiap $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{g}$.

Untuk kasus bilinear-*form*,yaitu $x_{i_1}^* \wedge x_{i_2}^* : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, rumus hasil kali *wedge*-nya diperoleh dari [10] dan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\left(x_{i_1}^* \wedge x_{i_2}^*\right)(a_1, a_2) = \begin{vmatrix} x_{i_1}^*(a_1) & x_{i_1}^*(a_2) \\ x_{i_2}^*(a_1) & x_{i_2}^*(a_2) \end{vmatrix} \quad (5)$$

Menggunakan sifat determinan, pemetaan $x_{i_1}^* \wedge x_{i_2}^*$ adalah bilinear *form* dan *skew-symmetric*. Untuk melihat ini, misalkan $\tau \coloneqq x_{i_1}^* \wedge x_{i_2}^*$.

1. $$\begin{aligned} \tau(a_1 + c, a_2) &= \begin{vmatrix} x_{i_1}^*(a_1 + c) & x_{i_1}^*(a_2) \\ x_{i_2}^*(a_1 + c) & x_{i_2}^*(a_2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_{i_1}^*(a_1) + x_{i_1}^*(c) & x_{i_1}^*(a_2) \\ x_{i_2}^*(a_1) + x_{i_2}^*(c) & x_{i_2}^*(a_2) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x_{i_1}^*(a_1) & x_{i_1}^*(a_2) \\ x_{i_2}^*(a_1) & x_{i_2}^*(a_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{i_1}^*(c) & x_{i_1}^*(a_2) \\ x_{i_2}^*(c) & x_{i_2}^*(a_2) \end{vmatrix} \\ &= \tau(a_1, a_2) + \tau(c, a_2). \end{aligned}$$

   Hal yang sama dapat ditunjukkan untuk linearitas komponen a_2 dan sifat homogenitas, yaitu $\tau(ka_1, a_2) = k\tau(a_1, a_2)$.
2. Dengan mempertukarkan baris/kolom kita peroleh bahwa

   $$\begin{vmatrix} x_{i_1}^*(a_1) & x_{i_1}^*(a_2) \\ x_{i_2}^*(a_1) & x_{i_2}^*(a_2) \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_{i_1}^*(a_2) & x_{i_1}^*(a_1) \\ x_{i_2}^*(a_2) & x_{i_2}^*(a_1) \end{vmatrix}.$$

   Dengan kata lain, $\tau(a_1, a_2) = -\tau(a_2, a_1)$.

Contoh 1. Misalkan $\mathfrak{g}$ ruang vektor real berdimensi dua dengan basisnya $B = \{x_1, x_2\}$. Misalkan $\mathfrak{g}^*$ dual ruang vektor $\mathfrak{g}$ yang memuat semua satu-*form* di $\mathfrak{g}$ dengan basisnya $B^* = \{x_1^*, x_2^*\}$. Dengan kata lain, $\mathfrak{g}^* = \operatorname{span} B^* = \langle x_1^*, x_2^* \rangle$. Hubungan antara B dan B^* diberikan oleh persamaan (3). Selanjutnya pilih $\omega = x_1^* \wedge x_2^*$. Dalam hal ini, $\omega = x_1^* \wedge x_2^*$ adalah pemetaan bilinear dan bersifat *skew-symmetric*. Jadi, untuk membuktikan bahwa $\omega = x_1^* \wedge x_2^*$ *symplectic form*, cukup dibuktikan bahwa $\omega = x_1^* \wedge x_2^*$ *non-degenerate*. Misalkan entri (i, j) dari matriks A didefiniskan sebagai $\omega(x_i, x_j)$ dengan $1 \leq i, j \leq 2$, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karena determinan matriks A sama dengan satu, maka ω *non-degenerate*. Jadi, ω suatu *symplectic form* pada $\mathfrak{g}$. Hal ini mengakibatkan $(\mathfrak{g}, \omega)$ ruang *symplectic*.

3. Metode

Proses *literature reviews* telah dilakukan terkait *symplectic form* yang berhubungan dengan satu-*form* baik pada aljabar Lie kontak maupun aljabar Lie Frobenius [11].

Definisi 4[10]**.** *Misalkan* $\mathfrak{g}$ *suatu aljabar Lie real berdimensi hingga. Misalkan pula* $\mathfrak{g}^*$ *suatu dual ruang vektor dari* $\mathfrak{g}$. *Misalkan* $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ *satu-form, maka* $d\alpha = \omega$ *adalah bilinear form pada* $\mathfrak{g}$.

Rumus untuk perpangkatan bilinear-*form*

$$\mathrm{d}\alpha = \omega = \sum_{i=1}^{n} x_i^* \wedge y_i^* \tag{6}$$

diberikan oleh persamaan berikut ini:

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\alpha)^n = \omega^n &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \wedge y_i^*\right)^n \\ &= n!\,(x_1^* \wedge y_1^*) \wedge \ldots \wedge (x_n^* \wedge y_n^*)\end{aligned}$$

dengan menggunakan sifat bahwa $x_i^* \wedge x_i^* = 0$ dan $x_i^* \wedge x_j^* = -x_j^* \wedge x_i^*$ dengan $i \neq j$, maka persamaan di atas dapat ditulis ulang sebagai berikut:

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\alpha)^n = \omega^n &= \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^* \wedge y_i^*\right)^n \\ &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!\,(x_1^* \wedge x_2^* \ldots \wedge x_n^*)(y_1^* \wedge y_2^* \wedge \ldots \wedge y_n^*)\end{aligned} \tag{7}$$

Jika dimensi suatu aljabar Lie ganjil yaitu $2n+1$ dan terdapat $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ yang memenuhi $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^n \neq 0$ dengan $(\mathrm{d}\alpha)^n$ sebagaimana dituliskan dalam persamaan (7) maka aljabar Lie tersebut dinamakan aljabar Lie kontak. Selanjutnya, Jika dimensi suatu aljabar Lie genap yaitu $2n$ dan terdapat $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ suatu satu-*form* sedemikian sehingga bilinear *form* $\omega \coloneqq \mathrm{d}\alpha$ bersifat *symplectic* maka aljabar Lie tersebut dinamakan aljabar Lie Frobenius. Secara formal definisi aljabar Lie kontak dan aljabar Lie Frobenius diberikan dalam dua definisi berikut ini:

Definisi 5[4]**.** *Aljabar Lie* $\mathfrak{g}_C$ *berdimensi* $2n+1$ *dikatakan aljabar Lie kontak jika terdapat* $\alpha \in \mathfrak{g}_C^*$ *sedemikian sehingga* $2n+1$*-form* $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^n \neq 0$.

Definisi 6[4]**.** *Aljabar Lie* $\mathfrak{g}_F$ *dikatakan aljabar Lie Frobenius jika terdapat* $\alpha \in \mathfrak{g}_C^*$ *sedemikian sehingga bilinear-form yang didefinisikan oleh*$\omega = \mathrm{d}\alpha$ *suatu symplectic-form.*

Komentar 1. Terkait dua definisi terakhir diperoleh pernyataan sebagai berikut :

1. Misalkan $\mathfrak{g}_C$ suatu aljabar Lie berdimensi $2n+1$. Misalkan $\alpha \in \mathfrak{g}_C^*$ satu-*form*. $2n+1$-*form* $\alpha \wedge (\mathrm{d}\alpha)^n \neq 0$ mengakibatkan dimensi *radical* dari $\omega \coloneqq \mathrm{d}\alpha$ sama dengan satu. Dalam hal *radical* dari $\omega = \mathrm{d}\alpha$ dinotasikan oleh $\mathrm{Rad}(\omega)$ dan didefinisikan oleh
$$Rad(\omega) = \{x \in \mathfrak{g}_C \;;\omega(x,y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}_C\} \tag{8}$$
2. Misalkan $\mathfrak{g}_F$ suatu aljabar Lie berdimensi $2n$. Misalkan $\alpha \in \mathfrak{g}_C^*$ satu-*form*. Bilinear-*form* $\omega \coloneqq \mathrm{d}\alpha$ *non-degenerate* jika dan hanya jika $(\mathrm{d}\alpha)^n \neq 0$ [4].

4. Hasil dan Pembahasan

Hasil utama dalam penelitian ini dinyatakan berdasarkan tipe aljabar Lie-nya sebagai berikut:

4.1 Symplectic form Aljabar Lie Kontak

Terkait aljabar Lie kontak, kita berikan bukti lengkap hasil yang telah diperoleh Rodríguez-Vallarte dan Salgado (lihat [6], halaman 26-27). Sebelum membuktikan hasil tersebut, kita peroleh hasil pendahuluan sebagai berikut:

Teorema 7 [6]. *Misalkan* $\mathfrak{g}$ *aljabar Lie real berdimensi 3 atas lapangan* $\mathbb{R}$ *dan himpunan* $S = \{x_1, x_2, x_3\} \subseteq \mathfrak{g}$ *adalah himpunan yang bebas linear dengan* $\mathfrak{g} = \langle S \rangle$. *Maka* $\mathfrak{g}$ *isomorfik dengan aljabar Lie Heisenberg dengan bracket Lie tak nolnya diberikan oleh* $[x_1, x_2] = x_3$.

Misalkan $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}$ aljabar Lie Heisenberg berdimensi tiga dengan basisnya $B = \{x_1, x_2, x_3\}$. *Bracket* Lie tak nolnya diberikan oleh persamaan $[x_1, x_2] = x_3$. Tentu saja $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}$ adalah aljabar Lie nilpotent berderajat dua dan $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}$ bukan aljabar Lie Frobenius. Misalkan $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}^*$ dual dari ruang vektor $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}$ dengan basisnya adalah $B^* = \{x_1^*, x_2^*, x_3^*\}$. Hubungan antara $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}$ dan $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}^*$ diberikan oleh persamaan (3). Terdapat satu-*form* $\alpha = x_1^*$ di mana $\mathrm{d}\alpha = x_2^* \wedge x_3^*$. Kita akan buktikan bahwa tiga-*form* $\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha = x_1^* \wedge x_2^* \wedge x_3^* \neq 0$ untuk semua elemen yang bebas linear di $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}$. Untuk itu, misalkan $v_1, v_2,$ dan v_3 elemen-elemen di $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}$ yang bebas linear. Kita tuliskan $v_1, v_2,$ dan v_3 sebagai kombinasi linear elemen-elemen $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ yaitu: $v_1 = k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3, v_2 = l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3,$ dan $v_3 = m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3$ dengan l_i, k_i, m_i skalar-skalar real dan $i = 1,2,3$. Oleh karena itu, himpunan $S = \{k = (k_1, k_2, k_3)^T, l = (l_1, l_2, l_3)^T, m = (m_1, m_2, m_3)^T\}$ bebas linear di $\mathbb{R}^3$ karena jika tidak, kontradiksi dengan pernyataan bahwa himpunan $B = \{x_1, x_2, x_3\}$ membangun $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}$. Menggunakan definisi tiga-*form* dan dengan menghitung langsung, didapat:

$$
\begin{aligned}
(\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha)(v_1, v_2, v_3) &= (x_1^* \wedge x_2^* \wedge x_3^*)(v_1, v_2, v_3) \\
&= |k\ l\ m| = \begin{vmatrix} k_1 & l_1 & m_1 \\ k_2 & l_2 & m_2 \\ k_3 & l_3 & m_3 \end{vmatrix} \\
&= k_1l_2m_3 + k_3l_1m_2 + k_2l_2m_1 - (k_3l_2m_1 + k_1l_3m_2 + k_2l_1m_3) = \Sigma
\end{aligned}
$$

Karena himpunan $S = \{k = (k_1, k_2, k_3)^T, l = (l_1, l_2, l_3)^T, m = (m_1, m_2, m_3)^T\}$ bebas linear di $\mathbb{R}^3$ maka $\Sigma \neq 0$. Oleh karenanya, $\alpha \wedge \mathrm{d}\alpha = x_1^* \wedge x_2^* \wedge x_3^* \neq 0$. Jadi, $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}$ suatu aljabar Lie kontak dengan struktur kontaknya adalah $\alpha = x_1^*$.

Hal ini sejalan dengan hasil yang didapat dalam [6] sebagaimana dinyatakan dalam proposisi berikut ini:

Proposisi 1. *Setiap aljabar Lie* $\mathfrak{g}$ *atas lapangan* $\mathbb{R}$ *berdimensis tiga dan tidak komutatif adalah aljabar Lie kontak.*

4.2 Symplectic form Aljabar Lie Frobenius

Terkait aljabar Lie Frobenius, kita berikan contoh sederhana bagaimana mendapatkan satu-*form* dan keterkaitannya dengan *symplectic form-nya. Misalkan* $\mathfrak{g}_F$ *aljabar Lie real berdimensi dua dengan basis* $B = \{x_1, x_2\}$. *Bracket* Lie-nya diberikan oleh $[x_1, x_2] = x_2$. Pilih satu-*form* $\alpha = x_2^*$. Konstruksi $\omega = \mathrm{d}\alpha = x_1^* \wedge x_2^*$. Kita buktikan bahwa untuk setiap x dan y $\omega(x, y) = \alpha([x, y])$. Dengan menghitung langsung, kita peroleh bahwa $\omega = \mathrm{d}\alpha = x_1^* \wedge x_2^*$. Di sisi lain, ω bersifat non-degenrate karena determinan matriks yang entri komponen $(i, j), 1 \leq i, j \leq 2$ didefinisikan oleh $\omega(x_i, x_j)$ tidak sama sama dengan nol. Dengan kata lain, $\mathrm{d}\alpha \neq 0$. Oleh karenanya, ω suatu *symplectic form.* Jadi, $\mathfrak{g}_F$ adalah aljabar Lie Frobenius.

Selanjutnya, perhatikan bahwa aljabar Lie Heisenberg berdimensi tiga dapat dinyatakan dalam bentuk *semi-direct sum* $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}} = \langle x_2, x_3 \rangle \rtimes \langle x_1 \rangle = \mathbb{R}x_1 \oplus \mathbb{R}x_3 \rtimes \mathbb{R}x_1$. Aljabar ini bukan aljabar Lie Frobenius. Namun demikian kita bisa menghitung derivasi dari $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}$, kita dapat memilih sub-aljabar komutatif yang memuat derivasi yang dapat didiagonalkan. Mengikuti hasil [2], kita memilih sub-aljabar $\mathfrak{T}$ yang dibangun oleh elemen tunggal $t = \mathrm{diag}\{a, b, a+b\}$ dengan $a, b \in \mathbb{R}$ tetapi $a \neq -b$. Kita klaim bahwa aljabar Lie $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}{}'$yang dibangun oleh $D = \{x_1, x_2, x_3, t\}$ dengan *Bracket* Lie tak nolnya diberikan oleh persamaan $[x_1, x_2] = x_3$, $[t, x_1] = ax_1, [t, x_2] = bx_2$, dan $[t, x_3] = (a+b)x_3$ adalah aljabar Lie Frobenius. Pilih satu-*form*-nya $\alpha = (a+b)x_3^*$ dan konstruksi $\omega(x, y) = \alpha([x, y])$ untuk semua $x, y \in \mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}{}'$. Definisikan matriks A yang entri ke (i, j)-nya diberikan oleh $\omega\left(x_i, y_j\right)$ dengan $x_i, x_j \in D$. Kita peroleh $|A| = (a+b)^2$. Tetapi karena $a \neq -b$ maka $|A| \neq 0$. Jadi, $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}{}'$ suatu aljabar Lie Frobenius. Dalam hal ini, $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}' = \mathfrak{g}_{\mathfrak{h}} \rtimes \langle t \rangle$. Sebagai contoh, untuk kasus $a = b = 1/2$ maka kita bisa pilih satu-*form* $\alpha = x_3^*$. Menggunakan hubungan $\omega(x, y) = \alpha([x, y])$, hasil perhitungan *symplectic form*-nya dapat disajikan dalam Tabel 1 berikut ini :

Tabel 1. Perhitungan *symplectic-form* ω untuk $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}{}'$

Pasang $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$	**Nilai** $\boldsymbol{\omega(x, y) = x_3^*([x, y])}$
(t, t)	$\omega(t, t) = 0$
(t, x_1)	$\omega(t, x_1) = 0$
(t, x_2)	$\omega(t, x_2) = 0$
(t, x_3)	$\omega(t, x_3) = \alpha + \beta$
(x_1, t)	$\omega(x_1, t) = 0$
(x_1, x_1)	$\omega(x_1, x_1) = 0$
(x_1, x_2)	$\omega(x_1, x_2) = 1$
(x_1, x_3)	$\omega(x_1, x_3) = 0$
(x_2, t)	$\omega(x_2, t) = 0$
(x_2, x_1)	$\omega(x_2, x_1) = -1$
(x_2, x_2)	$\omega(x_2, x_2) = 0$
(x_2, x_3)	$\omega(x_2, x_3) = 0$
(x_3, t)	$\omega(x_3, t) = -(\alpha + \beta)$
(x_3, x_1)	$\omega(x_3, x_1) = 0$
(x_3, x_2)	$\omega(x_3, x_2) = 0$
(x_3, x_3)	$\omega(x_3, x_3) = 0$

Oleh karena itu, *symplectic form* ω untuk $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}{}'$ dapat dinyatakan oleh

$$\omega \coloneqq \mathrm{d}\alpha = x_1^* \wedge x_2^* + (\alpha + \beta)t^* \wedge x_3^* \,.$$

dengan menghitung langsung, untuk $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ di mana $\alpha \neq -\beta$ kita juga memperoleh empat-*form di* $\mathfrak{g}_{\mathfrak{h}}{}'$ yang sekaligus bersifat *non-degenerate* yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\omega^2 = (\mathrm{d}\alpha)^2 = 2\left[(x_1^* \wedge x_2^*) \wedge [(\alpha + \beta)t^* \wedge x_3^*]\right] \neq 0.$$

4. Kesimpulan

Telah dibuktikan bahwa setiap aljabar Lie real tak komutatif berdimensi tiga merupakan aljabar Lie kontak. Kemudian telah dibuktikan juga bahwa aljabar Lie real tak komutatif berdimensi dua merupakan aljabar Lie Frobenius. Selanjutnya, meskipun aljabar Lie Heisenberg berdimensi tiga bukan aljabar Lie Frobenius tetapi aljabar Lie tersebut dapat menjadi unsur pembentuk aljabar Lie Frobenius berdimensi empat. Untuk penelitian selanjutnya, dapat dikembangkan untuk tipe-tipe khusus aljabar Lie kontak dan aljabar Lie Frobenius seperti aljabar Lie kontak nilpotent dan aljabar Lie Frobenius *solvable* 2-langkah dengan dimensi yang lebih tinggi.

Ucapan Terima Kasih

Kami berterima kasih kepada Departemen Matematika FMIPA Unpad atas dukungannya dalam penelitian ini. Selanjutnya, kami juga berterima kasih kepada *reviewers* atas saran-sarannya dalam perbaikan artikel ini.

Referensi

[1] G. Salgado-González, "Invariants of contact Lie algebras," *Journal of Geometry and Physics*, vol. 144, pp. 388–396, Oct. 2019, doi: 10.1016/j.geomphys.2019.06.014.
[2] A. I. Ooms, "Computing invariants and semi-invariants by means of Frobenius Lie algebras," *J Algebra*, vol. 321, no. 4, pp. 1293–1312, Feb. 2009, doi: 10.1016/j.jalgebra.2008.10.026.
[3] M. A. Alvarez, M. Rodríguez-Vallarte, and G. Salgado, "Contact nilpotent Lie algebras," *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 145, no. 4, pp. 1467–1474, Oct. 2016, doi: 10.1090/proc/13341.
[4] M. A. Alvarez, M. C. Rodríguez-Vallarte, and G. Salgado, "Contact and Frobenius solvable Lie algebras with abelian nilradical," *Commun Algebra*, vol. 46, no. 10, pp. 4344–4354, Oct. 2018, doi: 10.1080/00927872.2018.1439048.
[5] B. Kruglikov, "Symplectic and contact Lie algebras with an application to Monge-Ampére equations," 1997.
[6] M. C. Rodríguez-Vallarte and G. Salgado, "5-dimensional indecomposable contact Lie algebras as double extensions," *Journal of Geometry and Physics*, vol. 100, pp. 20–32, Feb. 2016, doi: 10.1016/j.geomphys.2015.10.014.
[7] D. N. Pham, "g-quasi-Frobenius Lie algebras," *Archivum Mathematicum*, no. 4, pp. 233–262, 2016, doi: 10.5817/AM2016-4-233.
[8] M. Gerstenhaber and A. Giaquinto, "The Principal Element of a Frobenius Lie Algebra," *Lett Math Phys*, vol. 88, no. 1–3, pp. 333–341, Jun. 2009, doi: 10.1007/s11005-009-0321-8.
[9] A. Diatta and B. Manga, "On Properties of Principal Elements of Frobenius Lie Algebras ," *Journal of Lie Theory*, vol. 24, no. 3, pp. 849–864, 2014.
[10] A. McInerney, *First Steps in Differential Geometry*. New York, NY: Springer New York, 2013. doi: 10.1007/978-1-4614-7732-7.
[11] A. Diatta, B. Manga, and A. Mbaye, "On systems of commuting matrices, Frobenius Lie algebras and Gerstenhaber's Theorem," Feb. 2020, [Online]. Available: http://arxiv.org/abs/2002.08737