JOMTA
Journal of Mathematics: Theory and Applications
Vol. 6, No. 2, 2024, pp. 178 – 191

p-ISSN: 2685-9653 e-ISSN: 2722-2705
DOI: 10.31605/jomta.v6i2.4044

Sifat Kekonvergenan Lemah pada Ruang Bernorma beserta Operator pada Ruang Barisan Konvergen Lemah

Yusuf B. Marabi Djala[1*] , Ariyanto[2] , Ganesha L. Putra[3], Irvandi G. Pasangka[4]

[1,2,3,4] *Program Studi Matematika, Universitas Nusa Cendana, Kupang-NTT, Indonesia*

Corresponding Email: yusufmarabidjala676@gmail.com*

Abstrak

Konsep kekonvergenan lemah dibangkitkan dengan "memperlemah" sifat kekonvergenan yang telah ada. Luaran pembahasan artikel ini adalah membuktikan sifat dasar kekonvergenan lemah, ruang barisan konvergen lemah adalah ruang Banach dan operator dari ruang barisan konvergen lemah ke ruang barisan lainnya $(l_1(X), l_p(X), l_\infty(x), S(X))$ dan sebaliknya adalah linear dan terbatas pada ruang bernorma.

Kata Kunci: Barisan Konvergen Lemah , Operator, Ruang Barisan Konvergen Lemah , Ruang Bernorma.

Abstract

The concept of weak convergence is generated by "weakening" the existing properties of convergence. The outcome of this article is to prove the basic properties of weak convergence, the space of weakly convergent sequence is a Banach space and the operators from the space of weakly convergent sequence to other sequence spaces $(l_1(X), l_p(X), l_\infty(x), S(X))$ and vice versa are linear and bounded in normed spaces .

Keywords: *Normed Space, Operator , Space of Weakly Convergent Sequence, Weakly Convergent Sequence.*

Received :16-07-2024, Revised :05-09-2024, Accepted :23-09-2024

1. Pendahuluan

Bila diketahui dua buah ruang bernorma X dan Y dengan operator $T : X \to Y$ adalah kontinu. Jika diambil sebarang barisan $\{x_n\}$ dalam X yang konvergen ke $x_0 \in X$ maka pasti barisan $\{T(x_n)\}$ konvergen ke $T(x_0)$ dalam Y (Kreyszig, 1998). Sifat ini juga berlaku pada fungsional $f: X \to Y$ di mana X ruang bernorma dan $Y = \mathbb{R}$ atau $\mathbb{C}$. Perhatikan contoh berikut. Diberikan $C[0,2\pi]$ koleksi semua fungsi kontinu pada $[0,2\pi]$, dengan hasil kali dalam sebagai berikut :

$$\langle x, y\rangle = \int_0^{2\pi} x(t)y(t)\, dt$$

Diambil

$$x_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\pi}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Berdasarkan Teorema representasi Riesz (Talakua, 2011) maka diperoleh $f\big(x_n(t)\big) = \langle x_n, y\rangle$.
Dapat ditunjukkan bahwa barisan $\{ x_n(t) \}$ di atas tidak konvergen ke 0, tetapi barisan $\{ f(x_n(t)) \}$ konvergen ke $f(0)$. Uraian di atas dapat dinyatakan secara umum sebagai berikut : bila sebarang barisan $\{x_n\}$ dalam X (tidak perlu konvergen yaitu dengan memperlemah) berakibat barisan $\{ f(x_n)\}$ konvergen dalam Y. Sifat inilah yang menginpirasi munculnya konsep konvergen lemah. Berdasarkan pengertian konvergen lemah, maka dapat diperoleh ruang barisan konvergen lemah beserta dengan normanya. Pada ruang barisan, dapat didefinisikan suatu operator matriks tak hingga (Maddox, 1970). Selanjutnya, artikel

ini akan membahas sifat-sifat kekonvergenan lemah, ruang barisan konvergen lemah, dan operator dari ruang barisan konvergen lemah ke ruang barisan lainnya dan sebaliknya.

2. Landasan Teori

Berikut ini akan diberikan definisi, sifat-sifat, dan teorema yang akan digunakan pada pembahasan selanjutnya. Beberapa sifat dan teorema dasar tidak diberikan karena diasumsikan sudah dipahami.

Definisi 2.1.1 Diberikan $\{x_n\}$ suatu barisan bilangan kompleks. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan konvergen ke $x_0 \in \mathbb{C}$, dinotasikan dengan $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ atau $x_n \to x_0$ jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x_0| < \varepsilon$ (Agarwal, 2010).

Definisi 2.1.2 Diberikan $\{x_n\}$ suatu barisan bilangan kompleks. Barisan $\{x_n\}$ disebut barisan cauchy jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n, m \geq n_0$ berlaku $|x_m - x_n| < \varepsilon$ (Agarwal, 2010).

Teorema 2.1.3 Diketahui X dan Y masing-masing ruang bernorma. Operator T kontinu di $x_0 \in X$ jika dan hanya jika untuk setiap barisan $\{x_n\}$ di dalam X yang konvergen ke x_0 berakibat barisan $\{T(x_n)\}$ konvergen ke $T(x_0) \in Y$ (Kreyszig, 1998).

Definisi 2.1.4 Diberikan X dan Y ruang bernorma. Operator linear $T: X \to Y$ dikatakan terbatas pada X jika terdapat bilangan real $M > 0$ sehingga $\|T(x)\| \leq M\|x\|$, untuk setiap $x \in X$ (Royden, 2010).

Teorema 2.1.5 Diketahui X dan Y masing-masing ruang bernorma. Jika $T: X \to Y$ linear, maka pernyataan berikut ekuivalen :

(1) T kontinu pada X.

(2) T kontinu di $x_0 \in X$.

(3) T kontinu di $0 \in X$.

(4) $\{\|T(x)\|: x \in X \; dan \; \|x\| \leq 1\}$ terbatas.

(5) Terdapat bilangan konstanta $M > 0$ sehingga $\|T(x)\| \leq M\|x\|$, untuk setiap $x \in X$.

Selanjutnya koleksi semua fungsi linear dan kontinu dari ruang bernorma X ke ruang bernorma Y dinotasikan dengan $L_c(X, Y)$.

Teorema 2.1.6 Diketahui X dan Y masing-masing ruang bernorma. $L_c(X, Y)$ lengkap (ruang Banach) jika Y lengkap (ruang Banach) (Kreyszig, 1998).

Dual Banach dari ruang bernorma dinotasikan dengan X^*, yaitu koleksi semua fungsional linear dan kontinu dari ruang bernorma X ke lapangan $F(\mathbb{R}/\mathbb{C})$, dengan normanya adalah :

$$\|f\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in X, \|x\| = 1} |f(x)|$$

dengan $f \in X^*$ dan $f(x) \in F$ (Kreyszig, 1998).

Teorema 2.1.7 Diberikan X ruang bernorma. Untuk setiap $x \in X$ berlaku

$$\|x\| = \sup_{f \in X^*, f \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}$$

(Kreyszig, 1998).

Teorema 2.1.8 Ruang dual dari ruang bernorma X yaitu X^* merupakan ruang Banach (Kreyszig, 1998).

3. Hasil dan Pembahasan

3.1 Barisan Konvergen Lemah

Definisi 3.1.1 (Barisan Konvergen Lemah) Diberikan X ruang bernorma dan X^* ruang dual dari X. Barisan $\{x_n\} \subset X$ dikatakan konvergen lemah pada X jika terdapat $x_0 \in X$, sehingga untuk setiap $f \in X^*$ berlaku $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$

Berdasarkan Definisi 2.1.1, maka definisi di atas dapat ditulis sebagai berikut.

Definisi 3.1.2 (Barisan Konvergen Lemah) Diberikan X ruang bernorma dan X^* ruang dual dari X. Barisan $\{x_n\} \subset X$ dikatakan konvergen lemah ke $x_0 \in X$, dinotasikan dengan $x_n \xrightarrow{w} x_0$, jika untuk setiap bilangan $\varepsilon > 0$ dan $f \in X^*$ terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$

Titik x_0 disebut limit lemah dari $\{x_n\}$. Selain notasi di atas, notasi lain yang sering digunakan adalah $x_n \rightharpoonup x_0$ atau $w - \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Teorema 3.1.3 ***(Ketunggalan Limit Lemah)*** *Jika barisan $\{x_n\}$ konvergen lemah, maka nilai limit lemahnya tunggal.*

Bukti. Misalkan $x_0, y_0 \in X$ merupakan nilai limit lemah dari $\{x_n\}$, yaitu $x_n \xrightarrow{w} x_0$ dan $x_n \xrightarrow{w} y_0$.Diambil sebarang bilangan $\epsilon > 0$ dan $f \in X^*$. $x_n \xrightarrow{w} x_0$, berarti terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, dan $x_n \xrightarrow{w} y_0$, berarti terdapat $n_1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_1$ berlaku$|f(x_n) - f(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Dipilih $n_2 = maks\{n_0, n_1\}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_2$ berlaku

$|f(x_0) - f(y_0)| =\leq |f(x_0) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Jadi, $0 \leq |f(x_0) - f(y_0)| < \varepsilon$, berakibat $f(x_0) - f(y_0) = 0$ atau $f(x_0 - y_0) = 0$ atau $x_0 = y_0$. Dengan kata lain, nilai limit lemahhnya tunggal.

Teorema 3.1.*4* *Diberikan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ barisan-barisan di ruang bernorma X. Jika $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ masing-masing konvergen lemah ke x_0 dan y_0, maka diperoleh:*

(a) Barisan $\{x_n\} + \{y_n\}$ konvergen lemah ke $x_0 + y_0$

(b) Barisan $c\{x_n\}$ konvergen lemah ke cx_0, untuk sebarang skalar c

Teorema 3.1.5 *Jika barisan $\{x_n\}$ konvergen lemah, maka ia terbatas*

Teorema 3.1.6 *Diberikan $\{x_n\}$ barisan di ruang bernorma X dan $\{c_n\}$ barisan di lapangan F. Jika $\{x_n\}$ konvergen ke lemah x_0 dan $\{c_n\}$ konvergen ke c, maka diperoleh barisan $\{c_n\}\{x_n\}$ konvergen lemah ke cx_0*

Bukti. Diketahui $\{x_n\}$ konvergen lemah ke x_0 dan $\{c_n\}$ konvergen ke c , yaitu $x_n \xrightarrow{w} x_0$ dan $c_n \to c$. Diambil sebarang bilangan $\varepsilon > 0$ dan $f \in X^*$. Karena $x_n \xrightarrow{w} x_0$, maka berarti terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ dan karena $c_n \to c$, maka berarti terdapat bilangan asli $n_1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_1$ berlaku $|c_n - c| < \frac{\varepsilon}{2M}$ .Dari $f \in X^*$ maka f terbatas dan $f(x) \in F$. Sehingga, $|f(x)| \leq M_1$ untuk suatu $M_1 > 0$.

Dipilih $n = maks\{n_0, n_1\}$ dan $M = maks\{|f(x_n)|, |c|\}$. Akibatnya diperoleh:

$|f(c_n x_n) - f(cx_0)| = |c_n f(x_n) - cf(x_n) + cf(x_n) - cf(x_0)|$

$= |f(x_n)(c_n - c) + c(f(x_n) - f(x_0))|$

$\leq |f(x_n)||(c_n - c)| + |c||f(x_n) - f(x_0)|$

$= M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} < \epsilon.$

Dengan kata lain, barisan $\{c_n x_n\} = \{c_n\}\{x_n\}$ konvergen lemah ke cx_0

Teorema 3.1.7 *Diberikan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ barisan-barisan di ruang bernorma X dan $f \in X^*$. Jika $\{x_n\}$ konvergen lemah ke x_0, $\{y_n\}$ konvergen lemah ke y_0 dan $f(xy) = f(x)f(y)$ untuk setiap $x, y \in X$, maka barisan $\{x_n\}\{y_n\}$ konvergen lemah ke $x_0 y_0$.*

Bukti. Diambil sebarang bilangan $\epsilon > 0$ dan $f \in X^*$. $x_n \xrightarrow{w} x_0$, berarti terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}$ dan $y_n \xrightarrow{w} y_0$, berarti terdapat bilangan asli $n_1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_1$ berlaku $|f(y_n) - f(y_0)| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Selanjutnya, dari $f \in X^*$ maka f terbatas dan $f(x) \in F$. Sehingga, $|f(x)| \leq M_1$ untuk suatu $M_1 > 0$.

Dipilih $n = maks\{n_0, n_1\}$ dan $M = maks\ \{|f(y_n)|, |f(x_0)|\}$. Akibatnya, diperoleh:

$|f(x_n y_n) - f(x_0 y_0)| = |f(x_n)f(y_n) - f(x_0)f(y_0)|$

$= |f(x_n)f(y_n) - f(y_n)f(x_0) + f(y_n)f(x_0) - f(x_0)f(y_0)|$

$= \left|f(y_n)\big(f(x_n) - f(x_0)\big) + f(x_0)\big(f(y_n) - f(y_0)\big)\right|$

$\leq |f(y_n)||f(x_n) - f(x_0)| + |f(x_0)||f(y_n) - f(y_0)|$

$$< M.\frac{\varepsilon}{2M} + M.\frac{\varepsilon}{2M} = \epsilon$$

Dengan kata lain, barisan $\{x_n\}\{y_n\}$ konvergen lemah ke $x_0 y_0$.

Teorema 3.1.8 *Jika barisan $\{x_n\}$ konvergen lemah ke x_0, maka $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| \geq \|x_0\|$*

Bukti. Pada lapangan $F(\mathbb{R}/\mathbb{C})$ berlaku $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$, maka $\lim_{n\to\infty}|f(x_n)| = |f(x_0)|$. Karena $x_n \xrightarrow{w} x_0$, berarti $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$. Akibatnya, $\lim_{n\to\infty}|f(x_n)| = |f(x_0)|$.

Selanjutnya perhatikan:

$|f(x_0)| = \lim_{n\to\infty}|f(x_n)| \leq \lim_{n\to\infty}\|f\||(x_n)| = \|f\| \lim_{n\to\infty}|(x_n)|$ atau ekuivalen dengan $\frac{|f(x_0)|}{\|f\|} \leq \lim_{n\to\infty}|(x_n)|$ atau $\lim_{n\to\infty}|(x_n)| \geq \frac{|f(x_0)|}{\|f\|}, f \neq 0$. Berdasarkan Teorema 2.1.7, diperoleh $\lim_{n\to\infty}|(x_n)| \geq \|x_0\|$

Definisi 3.1.9 (Barisan Cauchy Lemah) Diberikan $\{x_n\}$ barisan-barisan di ruang bernorma. Barisan $\{x_n\}$ dikatakan barisan Cauchy lemah, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ dan $f \in X^*$ terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq n_0$ berlaku $|f(x_m) - f(x_n)| < \epsilon$

Teorema 3.1.10 *Jika $\{x_n\}$ konvergen kuat ke x_0, maka ia konvergen lemah ke x_0*

Bukti. Diambil sebarang bilangan $\epsilon > 0$ dan $f \in X^*$.$f \in X^*$, maka f terbatas dan dapat dimisalkan $\|f\| = M > 0$.$\{x_n\}$ konvergen kuat ke x_0, berarti terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x_0| < \frac{\epsilon}{M}$

Akibatnya untuk $n \geq n_0$ diperoleh:

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n - x_0)| \leq \|f\||x_n - x_0| < M.\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

Dengan kata lain, $\{x_n\}$ konvergen lemah ke x_0.

Teorema 3.1.11 *Jika $\{x_n\}$ konvergen lemah, maka ia barisan Cauchy lemah*

Bukti. Diambil sebarang bilangan $\epsilon > 0$ dan $f \in X^*$.

$\{x_n\}$ konvergen lemah, misalkan ke x_0, berarti terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|f(x_n) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Akibatnya untuk $m, n \geq n_0$ diperoleh:

$$|f(x_m) - f(x_n)| \leq |f(x_m) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x_n)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Dengan kata lain, $\{x_n\}$ barisan Cauchy lemah.

Teorema 3.1.12 *Jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy (atau Cauchy kuat), maka ia barisan Cauchy lemah*

Bukti. Diambil sebarang bilangan $\epsilon > 0$ dan $f \in X^*$.$f \in X^*$, maka f terbatas dan dapat dimisalkan $\|f\| = M > 0$.$\{x_n\}$ barrisan Cauchy kuat ke x_0, berarti terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \geq n_0$ berlaku $|x_m - x_n| < \frac{\epsilon}{M}$

Akibatnya diperoleh:

$$|f(x_m) - f(x_n)| = |f(x_m - x_n)| \le \|f\| |x_m - x_n| < M.\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

Dengan kata lain, $\{x_n\}$ barisan Cauchy lemah.

Teorema 3.1.13 *Jika $\{x_n\}$ barisan Cauchy lemah dan mempunyai sebarang sub barisan $\{x_{n_k}\}$ yang konvergen lemah ke x_0, maka barisan $\{x_n\}$ juga konvergen lemah ke x_0*

Bukti. $\{x_n\}$ barisan Cauchy lemah, berarti untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ dan $f \in X^*$ terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $m, n \ge n_0$ berlaku $|f(x_m) - f(x_n)| < \frac{\epsilon}{2}$. Sub barisan $\{x_{n_k}\}$ konvergen lemah ke x_0, berarti untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_1 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n_k \ge n_1$ berlaku $\left|f(x_{n_k}) - f(x_0)\right| < \frac{\epsilon}{2}$.

Dipilih $n_2 = maks\{n_0, n_1\}$ sehingga untuk setiap $n, n_k \ge n_2$ berlaku

$$|f(x_n) - f(x_0)| \le \left|f(x_n) - f(x_{n_k})\right| + \left|f(x_{n_k}) - f(x_0)\right| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Dengan kata lain, barisan $\{x_n\}$ konvergen lemah ke x_0.

Definisi 3.1.14 Diberikan X ruang bernorma. Ruang bernorma X disebut lengkap lemah jika setiap barisan Cauchy lemah di dalamnya konvergen lemah. Selanjutnya, X yang lengkap lemah disebut ruang Banach lemah

3.2 Ruang Barisan Konvergen Lemah

Definisi 3.2.1 Diberikan X ruang bernorma dan barisan $\{x_n\} \subseteq X$. Didefinisikan $W(X)$ sebagai suatu koleksi dari semua barisan $\{x_n\}$ yang konvergen lemah di ruang bernorma X atau $W(X) = \left\{\{x_n\} \subseteq X : x_n \xrightarrow{w} x_0, x_0 \in X\right\}$. Selanjutnya, $W(X)$ disebut ruang barisan konvergen lemah.

Mudah ditunjukkan bahwa $W(X)$ adalah ruang linear.

Definisi 3.2.2 (Norma pada W(X)) Diberikan ruang linear W(X). Untuk setiap $\{x_n\} \in W(X)$ didefinisikan norma dari $\{x_n\}$ adalah

$$\|\{x_n\}\| = \sup_{f \in X^*, f \ne 0} \sup_{n \ge 1} |f(x_n)|$$

Teorema 3.2.3 *Ruang linear $W(X)$ terhadap norma pada Definisi 3.2.2 merupakan ruang bernorma*

Bukti. Diambil sebarang $\{x_n\}, \{y_n\} \in W(X)$ dan $c \in F$.

i. $\|\{x_n\}\| \ge 0$ sebab $|f(x_n)| \ge 0$ dan $\|\{x_n\}\| = 0 \Leftrightarrow \sup_{f \in X^*} \sup_{n \ge 1} |f(x_n)| = 0 \Leftrightarrow |f(x_n)| = 0 \Leftrightarrow f(x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = 0 \Leftrightarrow \{x_n\} = \{0\}$

ii. $\|c\{x_n\}\| = \sup_{f \in X^*} \sup_{n \ge 1} |f(cx_n)| = \sup_{f \in X^*} \sup_{n \ge 1} |cf(x_n)| = \sup_{f \in X^*} \sup_{n \ge 1} |c||f(x_n)| = |c| \sup_{f \in X^*} \sup_{n \ge 1} |f(x_n)| = |c| \|\{x_n\}\|$

iii. $\|\{x_n\} + \{y_n\}\| = \|\{x_n - y_n\}\| = \sup_{f \in X^*} \sup_{n \ge 1} |f(x_n + y_n)| = \sup_{f \in X^*} \sup_{n \ge 1} |f(x_n) + f(y_n)| \le \sup_{f \in X^*} \sup_{n \ge 1} |f(x_n)| + \sup_{f \in X^*} \sup_{n \ge 1} |f(y_n)| = \|\{x_n\}\| + \|\{y_n\}\|$

Dari (i) sampai (iii), disimpulakn $W(X)$ ruang bernorma.

Teorema 3.2.4 *Ruang bernorma $W(X)$ terhadap norma pada Definisi 3.2.2 merupakan ruang Banach*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $W(X)$ lengkap, yaitu setiap barisan Cauchy di dalamnya konvergen. Ambil sebarang barisan Cauchy $\{x^{(k)}\} \subset W(X)$ dengan $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}$. Sehingga untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $k, l \geq n_0$ berlaku

$\|x^{(k)} - x^{(l)}\| = \left\|\left\{x_n^{(k)}\right\} - \left\{x_n^{(l)}\right\}\right\| = \left\|\left\{x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right\}\right\| < \frac{\epsilon}{3}$ atau

$$\sup_{f\in X^*, f\neq 0} \sup_{n\geq 1} \left|f\left(x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right)\right| = \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \sup_{n\geq 1} \left|f\left(x_n^{(k)}\right) - f\left(x_n^{(l)}\right)\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

Hal ini berakibat $\left|f\left(x_n^{(k)}\right) - f(x_n^{(l)})\right| < \epsilon$ (*)

Dari (*), diperoleh barisan $\left\{f\left(x_n^{(k)}\right)\right\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam lapangan F. Karena lapangan F merupakan ruang Banach, maka barisan Cauchy $\left\{f\left(x_n^{(k)}\right)\right\}$ konvergen, misalkan konvergen ke $f\left(x_n^{(0)}\right) \in F$, sehingga diperoleh

$$\left|f\left(x_n^{(k)}\right) - f\left(x_n^{(0)}\right)\right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (**)$$

Akibat dari (**) diperoleh:

$$\|x^{(k)} - x^{(0)}\| = \left\|\left\{x_n^{(k)}\right\} - \left\{x_n^{(0)}\right\}\right\| = \left\|\left\{x_n^{(k)} - x_n^{(0)}\right\}\right\| = \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \sup_{n\geq 1} \left|f\left(x_n^{(k)} - x_n^{(0)}\right)\right|$$

$$= \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \sup_{n\geq 1} \left|f\left(x_n^{(k)}\right) - f\left(x_n^{(0)}\right)\right| < \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \sup_{n\geq 1} \frac{\epsilon}{3} < \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \sup_{n\geq 1} \epsilon = \epsilon$$

Dengan kata lain, $\left\{x^{(k)}\right\}$ konvergen kuat ke $x^{(0)}$ (i)

Akan ditunjukkan bahwa $x^{(0)} = \{x_n^{(0)}\} \in W(X)$.

Dari barisan $\left\{x_n^{(k)}\right\} \in W(X)$, maka ia barisan konvergen lemah. Dari Teorema 3.1.11, maka ia juga barisan Cauchy lemah sehingga untuk setiap $m, n \geq n_1$ berlaku

$$\left|f\left(x_m^{(k)}\right) - f\left(x_n^{(k)}\right)\right| < \frac{\epsilon}{3} \qquad (***)$$

Dipilih $n_2 = maks\ \{n_0, n_1\}$. Dari (**) dan (***) untuk setiap $k, m, n \geq n_2$ berlaku

$$\left|f\left(x_m^{(0)}\right) - f\left(x_n^{(0)}\right)\right| = \left|f\left(x_m^{(0)}\right) - f\left(x_m^{(k)}\right) + f\left(x_m^{(k)}\right) - f\left(x_n^{(k)}\right) + f\left(x_n^{(k)}\right) - f\left(x_n^{(0)}\right)\right|$$

$$\leq \left|f\left(x_m^{(0)}\right) - f\left(x_m^{(k)}\right)\right| + \left|f\left(x_m^{(k)}\right) - f\left(x_n^{(k)}\right)\right| + \left|f\left(x_n^{(k)}\right) - f\left(x_n^{(0)}\right)\right|$$

$$< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

Diperoleh $\left\{f\left(x_n^{(0)}\right)\right\}$ barisan Cauchy di lapangan F. Akibatnya ia konvergen kuat di lapangan F, sehingga $\left\{x_n^{(0)}\right\}$ konvergen lemah atau $\{x_n^{(0)}\} \in W(X)$ (ii)

Berdasarkan (i) dan (ii), disimpulkan bahwa barisan Cauchy $\left\{x^{(k)}\right\} \subset W(X)$ konvergen kuat ke $x^{(0)} = \{x_n^{(0)}\} \in W(X)$. Dengan kata lain, $W(X)$ ruang Banach.

Teorema 3.2.5 *Jika setiap barisan Cauchy lemah pada $W(X)$ adalah barisan Cauchy, maka $W(X)$ merupakan ruang Banach lemah*

Bukti. Akan ditunjukkan bahwa $W(X)$ lengkap lemah, yaitu setiap barisan Cauchy lemah di dalamnya konvergen lemah. Ambil sebarang barisan Cauchy lemah $\left\{x^{(k)}\right\} \subset W(X)$ dengan $x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}$. Sehingga, menurut Definisi 3.1.9, barisan $\left\{g\left(x^{(k)}\right)\right\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam lapangan F untuk setiap $g \in \left(W(X)\right)^*$. Karena lapangan F ruang Banach, maka barisan Cauchy $\left\{g\left(x^{(k)}\right)\right\}$ konvergen, misalkan konvergen ke $g\left(x^{(0)}\right) \in F$ sehingga diperoleh

$$\left|g\left(x^{(k)}\right) - g\left(x^{(0)}\right)\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

Dengan kata lain, $\left\{x^{(k)}\right\}$ konvergen lemah ke $x^{(0)}$ (i)

Akan ditunjukkan bahwa $x^{(0)} = \left\{x_n^{(0)}\right\} \in W(X)$

Karena setiap barisan Cauchy lemah $\left\{x^{(k)}\right\}$ pada $W(X)$ adalah barisan Cauchy, maka untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $k, l \geq n_0$ berlaku

$$\left\|x^{(k)} - x^{(l)}\right\| = \left\|\left\{x_n^{(k)}\right\} - \left\{x_n^{(l)}\right\}\right\| = \left\|\left\{x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right\}\right\| < \frac{\epsilon}{3} \text{ atau}$$

$$\sup_{f \in X^*, f \neq 0} \sup_{n \geq 1} \left|f\left(x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right)\right| = \sup_{f \in X^*, f \neq 0} \sup_{n \geq 1} \left|f\left(x_n^{(k)}\right) - f\left(x_n^{(l)}\right)\right| < \frac{\epsilon}{3}$$

Hal ini berakibat $\left|f\left(x_n^{(k)}\right) - f(x_n^{(l)})\right| < \epsilon$ (*)

Dari (*), diperoleh barisan $\left\{f\left(x_n^{(k)}\right)\right\}$ merupakan barisan Cauchy di dalam lapangan F. Karena lapangan F merupakan ruang Banach, maka barisan Cauchy $\left\{f\left(x_n^{(k)}\right)\right\}$ konvergen, misalkan konverken ke $f\left(x_n^{(0)}\right) \in F$, sehingga diperoleh

$$\left|f\left(x_n^{(k)}\right) - f\left(x_n^{(0)}\right)\right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (**)$$

Selanjutnya dari barisan $\left\{x_n^{(k)}\right\} \in W(X)$, maka ia barisan konvergen lemah. Dari Teorema 3.1.11, maka ia juga barisan Cauchy lemah sehingga untuk setiap $m, n \geq n_1$ berlaku

$$\left|f\left(x_m^{(k)}\right) - f\left(x_n^{(k)}\right)\right| < \frac{\epsilon}{3} \quad (***)$$

Dipilih $n_2 = maks\ \{n_0, n_1\}$. Dari (**) dan (***) untuk setiap $k, m, n \geq n_2$ berlaku

$\left|f\left(x_m^{(0)}\right)-f\left(x_n^{(0)}\right)\right|=\left|f\left(x_m^{(0)}\right)-f\left(x_m^{(k)}\right)+f\left(x_m^{(k)}\right)-f\left(x_n^{(k)}\right)+f\left(x_n^{(k)}\right)-f\left(x_n^{(0)}\right)\right|$

$\leq\left|f\left(x_m^{(0)}\right)-f\left(x_m^{(k)}\right)+\right|+\left|f\left(x_m^{(k)}\right)-f\left(x_n^{(k)}\right)\right|+\left|f\left(x_n^{(k)}\right)-f\left(x_n^{(0)}\right)\right|$

$<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon$

Diperoleh $\left\{f\left(x_n^{(0)}\right)\right\}$ barisan Cauchy di lapangan F. Akibatnya ia konvergen kuat di lapangan F, sehingga $\left\{x_n^{(0)}\right\}$ konvergen lemah atau $\{x_n^{(0)}\}\in W(X)$ (ii)

Berdasarkan (i) dan (ii), disimpulkan bahwa barisan Cauchy lemah $\{x^{(k)}\}\subset W(X)$ konvergen lemah ke $x^{(0)}=\{x_n^{(0)}\}\in W(X)$. Dengan kata lain, $W(X)$ ruang Banach lemah.

3.3 Operator pada Ruang Barisan Konvergen Lemah

Definisi 3.3.1 Diberikan $A=(a_{nk})$ suatu matriks tak hingga dengan $a_{nk}\in F$ dan S dan T merupakan ruang barisan pada X yang masing-masing berupa ruang deret konvergen mutlak $l_1(X)$, ruang barisan p-terjumlah mutlak $l_p(X)$, ruang barisan terbatas $l_\infty(X)$, $W(X)$ atau ruang barisan konvergen kuat $S(X)$. Didefinisikan operator $A: S\to T$ dengan $A(\{x_k\})=\{\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k\}_{n\geq 1}$ untuk setiap $\{x_k\}\in S$.

Teorema 3.3.2 *Operator A pada definisi di atas bersifat linear*

Teorema 3.3.3 *Diberikan X suatu ruang bernorma dan* $l_1(X)=\{\{x_k\}\subset X:\ \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\infty\}$ *ruang deret konvergen mutlak pada X dengan* $\|\{x_k\}\|_1=\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|$. *Operator* $A: W(X)\to l_1(X)$ *bersifat linear jika* $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|<\infty$

Bukti. Diambil sebarang $\{x_k\}\in W(X)$. Karena $\{x_k\}\in W(X)$, maka ia terbatas dan diperoleh

$$A(\{x_k\})=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots\\ a_{21} & a_{22} & \cdots\\ \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{\infty}a_{1k}x_k\\ \sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}x_k\\ \vdots\end{pmatrix}$$

Dari hipotesis dan perumuman sifat ketaksamaan segitiga diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k\right\|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\|a_{nk}x_k\|=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\|x_k\|\leq\sup_{k\geq 1}\|x_k\|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|<\infty$$

Dengan kata lain, $A(\{x_k\})\in l_1(X)$ atau $A: W(X)\to l_1(X)$. Jelas bahwa A linear.

Teorema 3.3.4 *Diberikan X suatu ruang bernorma dan* $l_1(X)=\{\{x_k\}\subset X:\ \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\infty\}$ *ruang deret konvergen mutlak pada X. Operator* $A: l_1(X)\to W(X)$ *bersifat linear terbatas jika* $\lim_{n\to\infty}a_{nk}=b_k$

Bukti. Diambil sebarang $\{x_k\}\in l_1(X)$. Karena $\{x_k\}\in l_1(X)$, maka $M_1=\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\infty$ dan $A(\{x_k\})=\{\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k\}_{n\geq 1}$. Selanjutnya, karena $\lim_{n\to\infty}a_{nk}=b_k$, maka $|a_{nk}-b_k|<\frac{\epsilon}{M_1}$ dan $\sup_{k\geq 1}|a_{nk}-b_k|<\frac{\epsilon}{M_1}$, untuk setiap $n \geq n_0$. Cukup jelas bahwa n_0 tidak bergantung pada k, sebab n merupakan indeks kolom dan k merupakan indeks baris pada A.

Dari hipotesis dan perumuman sifat ketakssamaan segitiga diperoleh untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk} - b_k)x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\|(a_{nk} - b_k)x_k\|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk} - b_k|\|x_k\| \leq \sup_{k\geq 1}|a_{nk} - b_k| \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\| < \frac{\epsilon}{M_1}.M_1 = \epsilon$$

Diperoleh $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k) \to (\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k)$ atau $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k) \to \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{nk})x_k\right)$. Akibatnya, menurut Teorema 3.1.10 $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k) \xrightarrow{w} \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lim_{n\to\infty} a_{nk})x_k\right)$. Dengan kata lain, $A(\{x_k\}) \in W(X)$atau $A: l_1(X) \to W(X)$.

Jelas bahwa A linear. Karena $\{a_{nk}\}$ konvergen, maka ia terbatas atau $|a_{nk}| < \infty$ untuk setiap n dan karena $f \in X^*$, maka ia terbatas atau $\|f\| < \infty$. Akibatnya untuk setiap $\{x_k\} \in l_p$ berlaku

$$\|A(\{x_k\})\| = \left\|\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right\}_{n\geq 1}\right\| = \sup_{f\in X^*, f\neq 0}\sup_{n\geq 1}\left|f\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right)\right| \leq \sup_{f\in X^*, f\neq 0}\|f\| \sup_{n\geq 1}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right\|$$

$$\leq \sup_{f\in X^*, f\neq 0}\|f\| \sup_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq 1}|a_{nk}|\right) \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\| = \sup_{f\in X^*, f\neq 0}\|f\| \sup_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq 1}|a_{nk}|\right) \|\{x_k\}\|_1 < \infty$$

dengan $0 \leq \sup_{f\in X^*, f\neq 0}\|f\| \sup_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq 1}|a_{nk}|\right) < \infty$

Dengan kata lain, A terbatas.

Teorema 3.3.5 *Diberikan X suatu ruang bernorma dan $l_p(X) = \{\{x_k\} \subset X: \sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^p < \infty\}$ ruang barisan p-terjumlah mutlak pada X dengan $1 < p < \infty$ dan $\|\{x_k\}\|_p = (\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|^p)^{\frac{1}{p}}$. Operator $A: W(X) \to l_p(X)$ bersifat linear jika $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| < \infty$*

Bukti. Diambil sebarang $\{x_k\} \in W(X)$. Karena $\{x_k\} \in W(X)$, maka ia terbatas dan $A(\{x_k\}) = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\}_{n\geq 1}$.

Dari hipotesis dan perumuman sifat $\|x_1 + x_2\|^p \leq (\|x_1\| + \|x_2\|)^p$ atau $\|\sum_{k=1}^{2} x_k\|^p \leq (\sum_{k=1}^{2}\|x_k\|)^p$ diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right\|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|a_{nk}x_k\|\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\|x_k\|\right)^p \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\max_{k\geq 1}\|x_k\| \sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\right)^p$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\max_{k\geq 1}\|x_k\|\right)^p \left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\right)^p = \left(\max_{k\geq 1}\|x_k\|\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\right)^p \leq \left(\max_{k\geq 1}\|x_k\|\right)^p \left(\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\right)^p$$

$< \infty$

Dengan kata lain, $A(\{x_k\}) \in l_p(X)$ atau $A: W(X) \to l_p(X)$. Jelas bahwa A linear.

Teorema 3.3.6 *Diberikan X suatu ruang bernorma dan $l_p(X) = \{\{x_k\} \subset X: \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p < \infty\}$ ruang barisan p-terjumlah mutlak pada X dengan $1 < p < \infty$. Operator $A: l_p(X) \to W(X)$ bersifat linear jika $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = b_k$*

Bukti. Diambil sebarang $\{x_k\} \in l_p(X)$. Karena $\{x_k\} \in l_p(X)$, maka $M_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p < \infty$ dan $A(\{x_k\}) = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k\}_{n\geq 1}$. Selanjutnya, karena $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = b_k$, maka $|a_{nk} - b_k| < \frac{\epsilon}{M_1}$ dan $\sup_{k\geq 1} |a_{nk} - b_k| < \frac{\epsilon}{M_1}$, untuk setiap $n \geq n_0$.

Dari hipotesis dan perumuman sifat ketaksamaan segitiga diperoleh untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - b_k) x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|(a_{nk} - b_k) x_k\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_k| \|x_k\|$$

$$\leq \sup_{k\geq 1} |a_{nk} - b_k| \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| \leq \sup_{k\geq 1} |a_{nk} - b_k| \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|^p < \frac{\epsilon}{M_1} . M_1 = \epsilon$$

Diperoleh $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k) \to (\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k)$ atau $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k) \to \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lim_{n\to\infty} a_{nk}) x_k\right)$. Akibatnya, menurut Teorema 3.1.10 $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k) \xrightarrow{w} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lim_{n\to\infty} a_{nk}) x_k\right)$. Dengan kata lain, $A(\{x_k\}) \in W(X)$ atau $A: l_p(X) \to W(X)$. Jelas bahwa A linear.

Teorema 3.3.7 *Diberikan X suatu ruang bernorma dan $l_\infty(X) = \left\{\{x_k\} \subset X: \sup_{k\geq 1} \|x_k\| < \infty\right\}$ ruang barisan terbatas pada X dengan $\|\{x_k\}\|_\infty = \sup_{k\geq 1} \|x_k\|$. Operator $A: W(X) \to l_\infty(X)$ bersifat linear jika $\sup_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$*

Bukti. Diambil sebarang $\{x_k\} \in W(X)$. Karena $\{x_k\} \in W(X)$, maka ia terbatas dan $A(\{x_k\}) = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k\}_{n\geq 1}$

Dari hipotesis diperoleh

$$\sup_{n\geq 1} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \right\| \leq \sup_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \|x_k\| \leq \sup_{k\geq 1} \|x_k\| \sup_{n\geq 1} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

Dengan kata lain, $A(\{x_k\}) \in l_\infty(X)$ atau $A: W(X) \to l_\infty(X)$. Jelas bahwa A linear.

Teorema 3.3.8 *Diberikan X suatu ruang bernorma dan $l_\infty(X) = \left\{\{x_k\} \subset X: \sup_{k\geq 1} \|x_k\| < \infty\right\}$ ruang barisan terbatas pada X. Operator $A: l_\infty(X) \to W(X)$ bersifat linear terbatas jika $\lim_{n\to\infty} |a_{nk} - b_k| = 0$*

Bukti. Diambil sebarang $\{x_k\} \in l_\infty(X)$. Karena $\{x_k\} \in l_\infty(X)$, maka $M_1 = \sup\limits_{k\geq 1}\|x_k\| < \infty$ $A(\{x_k\}) = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\}_{n\geq 1}$. Dari $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{nk} - b_k| = 0$ dan perumuman sifat penjumlahan limit, maka $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk} - b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty}|a_{nk} - b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$. Akibatnya, barisan $\{\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk} - b_k|\}_{n\geq 1}$ konvergen ke 0 atau $|\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk} - b_k|| = \sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk} - b_k| < \frac{\epsilon}{M_1}$, untuk setiap $n \geq n_0$.

Dari hipotesis dan perumuman sifat ketaksamaan segitiga diperoleh untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty}(a_{nk} - b_k)x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\|(a_{nk} - b_k)x_k\|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk} - b_k|\|x_k\| \leq \sup_{k\geq 1}\|x_k\| \sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk} - b_k| < M_1.\frac{\epsilon}{M_1} = \epsilon$$

Diperoleh

$(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k) \to (\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k)$ atau $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k) \to \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk})x_k\right)$. Akibatnya, menurut Teorema 3.1.10 $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k) \xrightarrow{w} \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk})x_k\right)$. Dengan kata lain, $A(\{x_k\}) \in W(X)$ atau $A: l_\infty(X) \to W(X)$.

Jelas bahwa A linear. Karena $\{\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\}_{n\geq 1}$ konvergen untuk $b_k = 0$, maka ia terbatas. Akibatnya untuk setiap $\{x_k\} \in l_\infty(X)$ berlaku

$$\|A(\{x_k\})\| = \left\|\left\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right\}_{n\geq 1}\right\| = \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \sup_{n\geq 1}\left|f\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right)\right|$$

$$\leq \sup_{f\in X^*, f\neq 0}\|f\| \sup_{n\geq 1}\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right\| \leq \sup_{f\in X^*, f\neq 0}\|f\| \sup_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq 1}\|x_k\|\right)\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|$$

$$= \sup_{f\in X^*, f\neq 0}\|f\| \sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\left(\sup_{k\geq 1}\|x_k\|\right) = \sup_{f\in X^*, f\neq 0}\|f\| \sup_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\,\|\{x_k\}\|_\infty < \infty$$

dengan $0 \leq \sup\limits_{f\in X^*, f\neq 0}\|f\| \sup\limits_{n\geq 1}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}| < \infty$

Dengan kata lain, A terbatas.

Teorema 3.3.9 *Diberikan X suatu ruang bernorma dan $S(X) = \{\{x_k\} \subset X : x_k \to x_0, x_0 \in X\}$ ruang barisan konvergen kuat pada X dengan $\|\{x_k\}\| = \sup\limits_{k\geq 1}\|x_k\|$. Operator $A: W(X) \to S(X)$ bersifat linear jika $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{nk} - b_k| = 0$*

Bukti. Diambil sebarang $\{x_k\} \in W(X)$. Karena $\{x_k\} \in W(X)$, maka ia terbatas $A(\{x_k\}) = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\}_{n\geq 1}$. Dari $\lim\limits_{n\to\infty}|a_{nk} - b_k| = 0$ dan perumuman sifat penjumlahan limit, maka

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} |a_{nk} - b_k| = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$. Akibatnya, barisan $\{\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_k|\}_{n\geq 1}$ konvergen ke 0 atau $|\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_k|| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_k| < \frac{\epsilon}{M_1}$, untuk setiap $n \geq n_0$.

Dari hipotesis dan perumuman sifat ketaksamaan segitiga diperoleh untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k - \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - b_k)x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|(a_{nk} - b_k)x_k\|$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_k| \|x_k\| \leq \sup_{k\geq 1} \|x_k\| \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - b_k| < M_1 . \frac{\epsilon}{M_1} = \epsilon$$

Diperoleh $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k) \to (\sum_{k=1}^{\infty} b_k x_k)$ atau $(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k) \to \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lim\limits_{n\to\infty} a_{nk})x_k\right)$. Dengan kata lain, $A(\{x_k\}) \in S(X)$ atau $A: W(X) \to S(X)$. Jelas bahwa A linear.

Teorema 3.3.10 *Diberikan X suatu ruang bernorma dan $S(X) = \{\{x_k\} \subset X : x_k \to x_0, x_0 \in X\}$ ruang barisan konvergen kuat pada X. Operator $A: S(X) \to W(X)$ bersifat linear terbatas jika $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{nk} - b_k| = 0$*

Bukti. Karena $S(X)$ sub ruang dari $l_\infty(X)$ dan $\|\{x_k\}\| = \sup\limits_{k\geq 1} \|x_k\|$, maka pembuktian teorema ini seperti pada Teorema 3.3.8.

Teorema 3.3.11 *Diberikan X suatu ruang bernorma dan $S(X) = \{\{x_k\} \subset X : x_k \to x_0, x_0 \in X\}$ ruang barisan konvergen kuat pada X. Operator $A: S(X) \to W(X)$ bersifat linear terbatas jika $\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\}_{n\geq 1} = \{c_k x_k\}_{k\geq 1}$ dan $c_k \to c$*

Bukti. Diambil sebarang barisan $\{x_k\} \in S(X)$ yang konvergen kuat ke x_0. Karena $c_k \to c$ dan $x_k \to x_0$, maka $c_k x_k \to c x_0$. Dari Teorema 3.1.10 diperoleh $c_k x_k \xrightarrow{w} c x_0$. Dengan kata lain, $A(\{x_k\}) \in W(X)$ atau A: $S(X) \to W(X)$. Jelas A linear. Karena $\sup\limits_{k\geq 1} |c_k| < \infty$, maka untuk setiap $\{x_k\} \in S(X)$ berlaku

$$\|A(\{x_k\})\| = \|\{c_k x_k\}_{k\geq 1}\| = \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \sup_{k\geq 1} |f(c_k x_k)| \leq \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \|f\| \sup_{k\geq 1} \|c_k x_k\|$$

$$\leq \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \|f\| \sup_{k\geq 1} |c_k| \left(\sup_{k\geq 1} \|x_k\|\right) = \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \|f\| \sup_{k\geq 1} |c_k| \, \|\{x_k\}\| < \infty$$

dengan $0 \leq \sup\limits_{f\in X^*, f\neq 0} \|f\| \sup\limits_{k\geq 1} |c_k| < \infty$

Dengan kata lain, A terbatas.

Teorema 3.3.12 *Operator $A: W(X) \to W(X)$ bersifat linear terbatas jika $\lim\limits_{n\to\infty} |a_{nk} - b_k| = 0$*

Bukti. Karena $S(X)$ sub ruang dari $W(X)$, maka pembuktian teorema ini seperti pada Teorema 3.3.9.

Teorema 3.3.13 *Operator* $A: W(X) \to W(X)$ *bersifat linear terbatas jika* $\{\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k\}_{n\geq 1} = \{c_k x_k\}_{k\geq 1}$ *dan* $c_k \to c$

Bukti. Diambil sebarang barisan $\{x_k\} \in W(X)$ yang konvergen lemah ke x_0. Karena $c_k \to c$ dan $x_k \xrightarrow{w} x_0$, maka menurut Teorema 3.1.6 diperoleh $c_k x_k \xrightarrow{w} c x_0$. Dengan kata lain, $A(\{x_k\}) \in W(X)$ atau $A: W(X) \to W(X)$. Jelas A linear. Karena $\sup_{k\geq 1}|c_k| < \infty$, maka untuk setiap $\{x_k\} \in W(X)$ berlaku

$$\|A(\{x_k\})\| = \|\{c_k x_k\}_{k\geq 1}\| = \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \sup_{k\geq 1} |f(c_k x_k)| = \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \sup_{k\geq 1} |c_k f(x_k)|$$

$$= \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \sup_{k\geq 1} |c_k||f(x_k)| = \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \left(\sup_{k\geq 1}|c_k|\right) \sup_{k\geq 1}|f(x_k)| = \left(\sup_{k\geq 1}|c_k|\right) \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \sup_{k\geq 1}|f(x_k)|$$

$$= \left(\sup_{k\geq 1}|c_k|\right) \|\{x_k\}\| < \infty$$

dengan $0 \leq \left(\sup_{k\geq 1}|c_k|\right) < \infty$

Dengan kata lain, A terbatas.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian, telah dibuktikan sifat-sifat dari barisan konvergen lemah, $W(X)$ merupakan ruang Banach terhadap norma $\|\{x_n\}\| = \sup_{f\in X^*, f\neq 0} \sup_{n\geq 1} |f(x_n)|$ untuk setiap $\{x_n\} \in W(X)$ dan terdapat operator matriks tak hingga yang bersifat linear dan terbatas dari $W(X)$ ke ruang barisan lainnya $(l_1(X), l_p(X), l_\infty(x), S(X))$ dan sebaliknya dengan penambahan syarat tertentu pada matriks. Lebih lanjut, penulis menyarankan untuk melanjutkan penelitian mengenai kekonvergenan lemah pada barisan di ruang-ruang lainnya dan pengaruh dimensi suatu ruang, berhingga dan tak berhingga, terhadap kekonvergenan lemah.

Referensi

[1] Agarwal, R. P., Parera, K., and Pinelas, S. *An Introduction to Complex Analysis*. Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2010.

[2] Ariyanto, "Kajian Sifat-Sifat Dual pada Ruang l^p," *Jurnal MIPA FST UNDANA*, vol. 8, no. 1, 2010.

[3] Kreyszig, E. *Introductory Functional Analysis with Aplications.* John Wiley & Sons, 1998.

[4] Lax, P. D. *Functional Analysis*. Wiley-Interscience, 2002.

[5] Royden, H. L., and Fitzpatrick, P. M. *Real Analysis : Fourth Edition.* Pearson Education Asia Limited and China Machine Ptyress, 2010.

[6] Talakua, M. W., and Naruru, S. J. "Teorema Representasi Riesz-Frechet pada Ruang Hilbert," Jurnal Barekang, vol. 5, no. 2, pp. 1-8, 2011.

[7] Maddox, I. J. *Elements of Functional Analysis*. Cambridge University Press, 1970.