

Model Matematika Mangsa-Pemangsa dengan Sebagian Mangsa Sakit dan Pemanenan pada Pemangsa

Rina¹, Yuliani², Muh. Ilyas³

^{1, 2, 3} Program Studi Matematika, Universitas Cokroaminoto Palopo, Indonesia
e-mail: ²yulimath2507@gmail.com

Abstrak. Tujuan penelitian ini adalah mengetahui analisis model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit dan pemanenan pada pemangsa. Pada penelitian ini diperoleh tiga titik keseimbangan yaitu $T_1(0,0,0)$, $T_2(1,0,0)$, dan T_3 . Analisis kestabilan titik keseimbangan dilakukan dengan metode linearisasi di sekitar titik keseimbangan interior T_3 kemudian dari matriks Jacobi diperoleh persamaan karakteristik yang dilanjutkan dengan Uji Kestabilan Hurwitz. Melalui simulasi numerik dengan menggunakan nilai parameter yang dimodifikasi dari penelitian sebelumnya, diperoleh titik keseimbangan interior $T_3(0.36,1.29,1.03)$ yang stabil asimtotik.

Kata kunci: pemanenan pemangsa, uji kestabilan Hurwitz, stabil asimtotik

Abstract. The purpose of this study was to determine the analysis of prey-predator mathematical models with some sick prey and harvesting on predators. In this study, three balance points were obtained namely, T_1 , T_2 , and T_3 . Analysis of the stability of the equilibrium point is carried out by the linearisation method around the interior equilibrium point then from the Jacobi matrix the characteristic equation is obtained followed by the Hurwitz Stability Test. Through numerical simulations using parameter values modified from previous studies, a stable interior asymptotic stable point is obtained.

Keywords: asymptotic stable, Hurwitz stability test, predator harvesting,

I. PENDAHULUAN

Pemodelan matematika merupakan salah satu tahap dari pemecahan masalah matematika dengan cara menyederhanakan kejadian-kejadian yang terjadi dalam bentuk matematika. Salah satu bentuk pemodelan yang dapat diterapkan yaitu masalah ekologi. Ekologi berasal dari kata Yunani *Oikos* yang berarti habitat dan *logos* berarti ilmu. Ekologi merupakan cabang ilmu dalam biologi yang mempelajari tentang hubungan makhluk hidup dengan habitatnya [1]. Ekologi juga berhubungan erat dengan tingkatan-tingkatan organisasi makhluk hidup yang memengaruhi dan merupakan suatu sistem yang menunjukkan kesatuan. Pada dasarnya makhluk hidup bergantung pada makhluk hidup lainnya ataupun habitatnya, sehingga terjadi hubungan timbal balik antara satu makhluk hidup dengan makhluk hidup lainnya atau dengan habitatnya. Hubungan makhluk hidup ataupun dengan habitatnya inilah yang merupakan interaksi. Salah satu interaksi yang biasa terjadi yaitu interaksi antara mangsa dan pemangsa. Populasi mangsa memiliki ketersediaan makanan yang terdapat di lingkungannya sedangkan populasi pemangsa memiliki makanan bergantung pada jumlah populasi mangsa, sehingga apabila jumlah populasi mangsa menurun

maka jumlah populasi pemangsa akan menurun sesuai jumlah mangsanya. Populasi mangsa pada umumnya dapat digolongkan menjadi dua kelompok yaitu mangsa sehat dan mangsa sakit. Mangsa yang sehat biasanya memiliki daya tahan tubuh yang kuat atau dapat melakukan pelarian dengan kecepatan yang lebih besar dibanding dengan mangsa yang sakit.

Beberapa penelitian tentang model matematika mangsa-pemangsa atau modifikasinya adalah model mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit oleh [2][3][4], pada jurnal tersebut dibahas tentang model mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit, dengan laju penularan penyakit menggunakan linier. Berdasarkan uraian tersebut, maka peneliti tertarik untuk mengembangkan hasil dari jurnal tersebut, dengan menambahkan asumsi E untuk menyatakan parameter yang mengukur pemanenan pemangsa, dengan menggunakan metode linearisasi. Oleh karena itu, tujuan penulisan ini yaitu untuk mengetahui analisis model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit dan dilakukan pemanenan pada pemangsa [5][6][7].

II. METODE

Penelitian ini dilakukan melalui tahapan penelitian sebagai berikut.

- Kajian pustaka merupakan tahap awal yang dilakukan untuk mendapatkan informasi dari buku-buku, jurnal, maupun skripsi yang berkaitan dengan model mangsa-pemangsa.
- Melakukan modifikasi model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit dengan menambahkan asumsi dilakukan pemanenan terhadap pemangsa.
- Menentukan titik keseimbangan (ekuilibrium) model mangsa-pemangsa yang telah dibentuk.
- Analisis kestabilan titik keseimbangan (ekuilibrium) dengan menggunakan metode linearisasi.
- Simulasi numerik dilakukan menggunakan *software maple*.
- Interpretasi adalah langkah akhir untuk menjelaskan hasil dari simulasi yang telah dilakukan.

III. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Model Matematika Mangsa-pemangsa

Berdasarkan rumusan masalah, model yang akan dikaji pada penelitian ini yakni model yang dimodifikasi dari suatu persamaan model mangsa-pemangsa dengan adanya kehadiran penyakit yang menyebar dengan laju P sehingga untuk populasi mangsa dibagi menjadi dua kelas yaitu X(t) menyatakan populasi mangsa yang rentan, Y(t) menyatakan populasi mangsa yang terinfeksi pada waktu t. Tanpa adanya penyakit dan pemangsa Z(t) dengan pertumbuhan populasi mangsa r (r > 0) mengikuti pertumbuhan logistik, dengan daya dukung lingkungan terhadap mangsa (K > 0). Laju penularan penyakit dari mangsa yang sakit ke mangsa yang rentan terserang penyakit yang disebabkan oleh interaksi keduanya, yang berbentuk laju penularan adalah nonlinier yaitu [8][9][10]:

$$\frac{PXY}{Q+X} \tag{1}$$

dengan PXY merupakan laju penularan penyakit dari mangsa rentan terhadap mangsa terinfeksi berikut.

$$\frac{1}{Q+X} \tag{2}$$

Persamaan di atas adalah efek jenuh insiden dari mangsa rentan secara konstan. Penyebaran penyakit dengan laju P hanya terjadi diantara mangsa saja dan bukan penyakit turunan, populasi yang terinfeksi tidak akan sembuh. Pemanasaan setiap individu yang terinfeksi penyakit mempunyai proporsi yang lebih besar dari pada mangsa yang rentan, karena mangsa yang terinfeksi lebih mudah akibat dari pergerakannya yang lebih lambat [11]. Para pemangsa tumbuh dengan subur pada saat mangsanya sangat banyak, akan tetapi pada akhirnya persediaan makanan pemangsa akan menurun. Ketika populasi pemangsa menurun, maka populasi mangsa akan meningkat lagi. Keadaan ini akan terus berputar (tumbuh dan turun).

Bentuk model matematika yang akan dimodifikasi yaitu:

$$\begin{aligned} X &= rX \left(1 - \frac{X}{K}\right) - \frac{PXY}{Q+X}, X > 0 \\ Y &= \frac{PXY}{Q+X} - \frac{\gamma YZ}{Z + \gamma \beta Y}, Y > 0 \\ Z &= \frac{e\gamma Y}{Z + \gamma \beta Y} - dZ, Z > 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Pada sistem persamaan (3), parameter-parameternya didefinisikan dengan r laju pertumbuhan/kelahiran murni pada populasi mangsa, K menyatakan daya dukung lingkungan (*carrying capacity*) terhadap mangsa, P menyatakan laju penularan penyakit, γ menyatakan laju total penyerangan pemangsa, β menyatakan laju penanganan pemangsa, Q menyatakan parameter yang mengukur efek jenuh insidensi secara konstan, e menyatakan laju perubahan ketangkasan lolos untuk mangsa dan d menyatakan laju kematian pada pemangsa. Untuk mempermudah penyelesaian sistem persamaan (3) maka dilakukan penyederhanaan atau mengurangi parameter dengan memisalkan variabel-variabel X, Y, Z sebagai berikut.

$$x = \frac{X}{K}, y = \frac{Y}{K}, z = \frac{Z}{\gamma \beta K}, t = r\tau \tag{4}$$

Selain variabel-variabel di atas, dilakukan juga penyederhanaan pada parameter-parameter pada persamaan (3).

$$\begin{aligned} k &= \frac{PK}{rQ}, b = \frac{\gamma}{r}, c = \frac{e}{r\beta}, a = \frac{d}{r}, \alpha = \frac{K}{Q} \\ \dot{x} &= x(1-x) - \frac{kxy}{1+\alpha x} \\ \dot{y} &= \frac{kxy}{1+\alpha x} - b \frac{yz}{z+y} \\ \dot{z} &= c \frac{yz}{z+y} - az \end{aligned} \tag{5}$$

Dengan menambahkan asumsi pemanenan pada pemangsa dengan parameter E, maka diperoleh bentuk modifikasi dari persamaan (5) yaitu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(1-x) - \frac{kxy}{1+\alpha x} \\ \dot{y} &= \frac{kxy}{1+\alpha x} - b \frac{yz}{z+y} \\ \dot{z} &= c \frac{yz}{z+y} - az - Ez \end{aligned} \tag{6}$$

3.2 Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan diperoleh dengan menyelesaikan $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$ dan $\frac{dz}{dt} = 0$. Berdasarkan persamaan (6) diperoleh tiga titik keseimbangan yaitu:

$$\begin{aligned} T_1 &= (0,0,0), \\ T_2 &= (1,0,0), \text{ dan} \end{aligned} \tag{7}$$

$$T_3 = \left(\frac{bz}{kz + ky - b\alpha z}, \frac{(1-x)(1+\alpha x)}{k}, \frac{(c-a+E)y}{a+E} \right)$$

Titik keseimbangan T_3 merupakan titik keseimbangan interior yaitu titik dengan $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

3.3 Analisis Titik Keseimbangan

Titik keseimbangan T_1 dan T_2 tidak dilakukan analisis kestabilan karena titik keseimbangan ini bukan merupakan titik keseimbangan interior. Analisis kestabilan hanya dilakukan pada titik keseimbangan interior yang merupakan syarat bahwa populasi tersebut ada. Matriks jacobian dari persamaan (12a, 12b, 12c) setelah dievaluasi terhadap titik keseimbangan interior $T_3(x^*, y^*, z^*)$ adalah sebagai berikut.

$$J = \begin{pmatrix} (1-2x^*) - \frac{ky^*}{(\alpha x^* + 1)^2} & -\frac{kx^*}{\alpha x^* + 1} & 0 \\ \frac{ky^*}{(\alpha x^* + 1)^2} & \frac{kx^*}{\alpha x^* + 1} - \frac{bz^{*2}}{(z^* + y^*)^2} & -\frac{by^{*2}}{(z^* + y^*)^2} \\ 0 & \frac{cz^{*2}}{(z^* + y^*)^2} & \frac{cy^{*2}}{(z^* + y^*)^2} - a - E \end{pmatrix} \quad (8)$$

Jenis kestabilan dari titik keseimbangan dapat diketahui dari nilai-nilai eigen persamaan karakteristiknya atau berdasarkan pada kriteria Routh-Hurwitz. Nilai eigen dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai titik keseimbangan ke dalam matriks jacobian. Pada persamaan (12a, 12b, 12c) hanya titik keseimbangan T_3 yang dianalisis kestabilannya karena keadaan jumlah spesies bernilai positif.

Pada titik keseimbangan $T_3 = (x^*, y^*, z^*)$, dimana

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{bz}{kz + ky - b\alpha z} \\ y^* &= \frac{(1-x)(1+\alpha x)}{k} \\ z^* &= \frac{(c-a+E)y}{a+E} \end{aligned} \quad (9)$$

substitusikan titik keseimbangan $T_3(x^*, y^*, z^*)$ ke persamaan (8), maka diperoleh matriks jacobian

$$J_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (10)$$

dengan

$$a_{11} = 1 - \frac{2bz}{kz + ky - b\alpha z} - \frac{(1-x)(1+\alpha x)}{\left(\frac{abz}{kz + ky - b\alpha z} + 1 \right)^2}$$

$$a_{12} = \frac{-kbz}{\frac{kz + ky - b\alpha z}{b\alpha z} + 1}$$

$$a_{13} = 0$$

$$a_{21} = \frac{(1-x)(1+\alpha x)}{\left(\frac{b\alpha z}{kz + ky - b\alpha z} + 1 \right)^2}$$

$$a_{22} = \frac{\frac{kbz}{kz + ky - b\alpha z}}{\frac{b\alpha z}{kz + ky - b\alpha z} + 1} - \frac{b \left(\frac{c-a+E}{a+E} \right)^2}{\left(\frac{(c-a+E)y}{a+E} + \frac{(1-x)(1+\alpha x)}{k} \right)^2}$$

$$a_{23} = -\frac{b \left(\frac{(1-x)(1+\alpha x)}{k} \right)^2}{\left(\frac{(c-a+E)y}{a+E} + \frac{(1-x)(1+\alpha x)}{k} \right)^2}$$

$$a_{31} = 0$$

$$a_{32} = \frac{c \left(\frac{(c-a+E)y}{a+E} \right)^2}{\left(\frac{(c-a+E)y}{a+E} + \frac{(1-x)(1+\alpha x)}{k} \right)^2}$$

$$a_{33} = \frac{c \left(\frac{(1-x)(1+\alpha x)}{k} \right)^2}{\left(\frac{(c-a+E)y}{a+E} + \frac{(1-x)(1+\alpha x)}{k} \right)^2} - a - E$$

Persamaan karakteristik yang bersesuaian dengan titik keseimbangan T_3 dinyatakan sebagai $\det(J_3 - \lambda I) = 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} \quad (11)$$

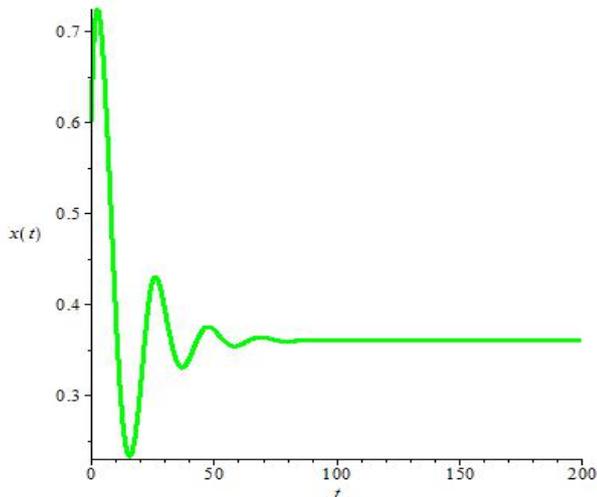
Sehingga diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut:

$$\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0 \quad (12)$$

Menurut kriteria Routh-Hurwitz, titik keseimbangan T_3 bersifat stabil asimtotik jika nilai koefisien pada persamaan karakteristiknya memenuhi kondisi $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, $a_1 a_2 - a_3 > 0$.

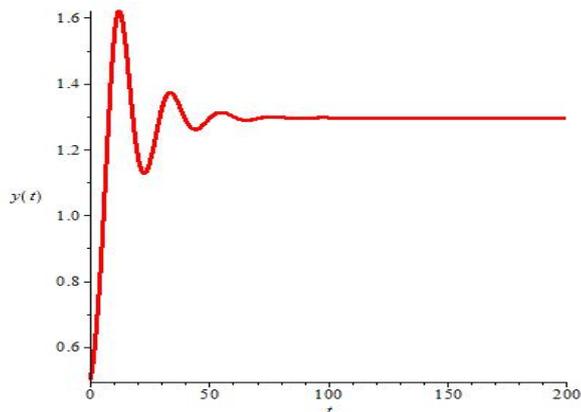
3.4 Simulasi Numerik

Simulasi dilakukan menggunakan nilai parameter yang dimodifikasi dari [4] Soleh (2013), yaitu $k = 0.6$, $b = 0.4$, $c = 0.9$, $a = 0.2$, $\alpha = 0.6$, $E = 0.3$. Dengan nilai parameter tersebut diperoleh titik keseimbangan interior $T_3(0.36, 1.29, 1.03)$ yang stabil asimtotik. Plot perilaku kurva solusi masing-masing populasi terhadap waktu (tahun) di sekitar titik keseimbangan dengan nilai awal $x(0) = 0.6$, $y(0) = 0.5$, $z(0) = 0.5$ diberikan pada gambar berikut.



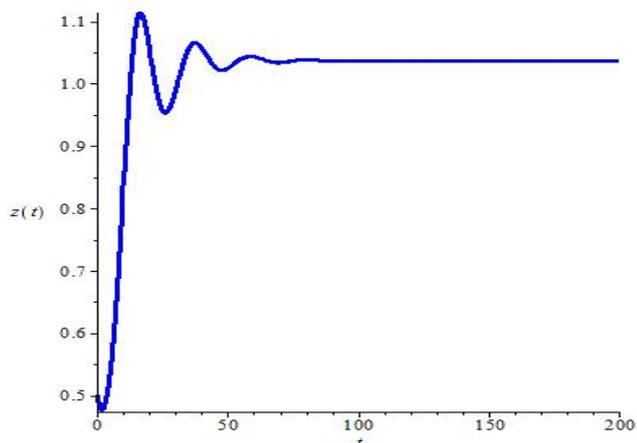
Gambar 2. Perilaku kurva solusi populasi mangsa rentan

Berdasarkan gambar 2 terlihat bahwa jika diberikan nilai awal $x(0) = 0.6$, $y(0) = 0.5$, $z(0) = 0.5$, maka pertumbuhan populasi mangsa rentan mengalami proses pertumbuhan yang naik turun, kemudian pada waktu tertentu bergerak konstan menuju nilai titik keseimbangan.



Gambar 3. Perilaku kurva solusi populasi mangsa yang terinfeksi

Berdasarkan gambar 3 terlihat bahwa jika diberikan nilai awal $x(0) = 0.6$, $y(0) = 0.5$, $z(0) = 0.5$, maka pertumbuhan populasi mangsa yang terinfeksi mengalami proses pertumbuhan yang naik turun, kemudian pada waktu tertentu bergerak konstan menuju nilai titik keseimbangan.



Gambar 4. Perilaku kurva solusi populasi pemangsa

Berdasarkan gambar 4 terlihat bahwa jika diberikan nilai awal $x(0) = 0.6$, $y(0) = 0.5$, $z(0) = 0.5$, maka pertumbuhan populasi pemangsa mengalami proses pertumbuhan yang naik turun, kemudian pada waktu tertentu bergerak konstan menuju nilai titik keseimbangan.

IV. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan, dapat diambil kesimpulan bahwa model matematika mangsa-pemangsa dengan sebagian mangsa sakit dan pemanenan pada pemangsa memiliki tiga titik keseimbangan yakni $T_1(0,0,0)$, $T_2(1,0,0)$ dan T_3 . Dengan menggunakan parameter yang dimodifikasi dari penelitian sebelumnya, diperoleh titik keseimbangan interior $T_3(0.36,1.29,1.03)$ yang stabil asimtotik, yang berarti bahwa meskipun populasi pemangsa dikenakan pemanenan konstan maka keberadaan ketiga populasi tersebut tetap lestari.

REFERENSI

- [1] I. Indriyanto, "Ekologi Hutan," Jakarta: Bumi Aksara, 2012.
- [2] K. Soleh dan S. Kholipah, "Model Matematika Mangsa-Pemangsa," in *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, Vol. 10 No. 2, 2013.
- [3] S. Agus, "Analisis Model Populasi Mangsa Pemangsa dengan Area Reservasi dan Pemanenan Pemangsa," in *Jurnal Matematika, Statistika dan Komputasi*, Vol. 15, No. 1, 2018.
- [4] J. Mu'tamar dan Zulkarnain, "Model Predator-Prey dengan Adanya Infeksi dan Pengobatan pada Populasi Mangsa," in *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, Vol. 15 No. 1, 2017.
- [5] R. Tarappa, "Analisis Kestabilan Model Predator-Prey Tipe Holling dengan Faktor Pemanenan pada Mangsa dan Pemangsa," Skripsi tidak diterbitkan, Palopo: Fakultas Sains Universitas Cokroaminoto Palopo, 2017.
- [6] I. Junaedi, D. Zulkarnaen, S. Julaeha, "Simulasi Model Mangsa Pemangsa di Wilayah yang Dilindungi untuk Kasus Pemangsa Tergantung Sebagian pada Mangsa," in *Jurnal Sains, Teknologi dan Industri*, Vol. 1 No. 1, 2015.
- [7] S. P. S. Chakraborty dan Bairagi, "Predator-Prey Interaction Harvesting. Mathematical Studi With Biological Ramifications," in *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, Hal. 4004-4059, 2012.
- [8] H. Anton, "Dasar-Dasar Aljabar Linear Jilid 2," Tangerang: Binarupa Aksara, 2008.
- [9] M. Mulyadi, "Penelitian Kuantitatif dan Kualitatif serta Pemikiran Dasar Menggabungkannya," in *Jurnal Studi dan Komunikasi*, Vol. 15 No.1, 2011.
- [10] M. I. Muslim, "Glass Ceiling: Sebuah Studi

Rina, dkk (2019)

Literatur,” in *Jurnal Bisnis Strategi*, Vol. 26 No. 1, 2017.

- [11] C. Neuhauser, “Calculus for Biology and Medicin,” in New Jersey: PearsonEducation, 2004.