JOMTA
Journal of Mathematics: Theory and Applications
Vol. 1, No. 2, 2019, P-ISSN 2685-9653 e-ISSN xxxx-xxxx
DOI: xxxx-xxxx-xxxx-xxxx

Persamaan Riccati dengan Metode Adams-Bashforth-Moulton

Muhammd Abdy[1], Ahmad Zaki[2] dan Amni Rasyidah[3]
[123]Jurusan Matematika, Universitas Negeri Makassar, Indonesia
e-mail: [1]muh.abdy@unm.ac.id,

Abstrak. Persamaan Riccati merupakan persamaan differensial non linear dengan bentuk persamaan yang cukup kompleks. Pada paper ini digunakan metode Adams-Bashforth-Moulton untuk mencari penyelesaian numerik pada titik tertentu dari suatu persamaan Riccati.

Kata kunci: metode Adam-Bashforth, metode Adam-Moulton , metode Runge Kutta

Abstract. *The Riccati equation is a non linear differential equation with a fairly complex equation. In this paper, we used the Adams-Bashforth-Moulton method to find numerical solutions at a certain point in a Riccati equation.*

Keywords*: Adam-Bashforth method, Adam-Moulton method, Runge Kutta method*

I. PENDAHULUAN

Persamaan *Riccati* merupakan representasi matematis yang berasal dari persoalan-persoalan teknik, rekayasa dan sains terapan, seperti pemrosesan random, difusi, stokastik, sintesa jaringan dan matematika finansial. Persamaan *Riccati* merupakan persamaan differensial *non* linear dengan bentuk persamaan yang cukup kompleks, sehingga beberapa teknik analitik tidak dapat menyelesaikan persoalan ini [1]. Untuk itu digunakan metode numerik dalam menyelesaikan persamaan differensial *non* linear tersebut. Salah satu metode numerik yang dapat digunakan untuk mencari penyelesaian numerik persamaan diferensial *non* linear adalah metode *Adams-Bashforth-Moulton*.

Metode *Adams-Bashforth-Moulton* melibatkan dua langkah dalam memperoleh penyelesaian. Langkah pertama adalah prediksi dan langkah kedua adalah koreksi. Metode prediktor-korektor adalah suatu satu himpunan dua persamaan untuk $\boldsymbol{y_{r+1}}$. Persamaan pertama disebut predictor, digunakan untuk memprediksi (memperoleh aproksimasi pertama untuk) $\boldsymbol{y_{r+1}}$; persamaan kedua, yang disebut korektor, kemudian digunakan untuk memperoleh nilai hasil koreksi (aproksimasi kedua untuk) $\boldsymbol{y_{r+1}}$ [2].

Beberapa peneliti telah mengkaji permasalahan mengenai persamaan *Riccati* [1][3][4][5]; maupun metode *Adams-Bashforth-Moulton* [6][7][8]. Wartono & Muhaijir [1] meneliti tentang persamaan diferensial *Riccati* yang diselesaikan dengan metode dekomposisian *Adomian Laplace* yang merupakan metode semi analitik dalam menyelesaikan persamaan diferensial *non* linier dikombinasikan dengan transformasi *Laplace*. Muliani [3] mengkaji tentang persamaan *Riccati* yang diselesaikan secara analitik menggunakan metode dekompisisi *Adomian Sumudu*. Pada paper ini persamaan *Riccati* diselesaikan secara numerik menggunakan metode *Adams-Bashforth-Moulton*.

II. PERSAMAAN RICCATI

Diberikan suatu persamaan [9][10]:

$$y(x) = \frac{cp(x)+q(x)}{cr(x)+s(x)} \tag{1}$$

dimana $cp(x) + q(x) \neq 0$. $p(x)$,$q(x)$,$r(x)$,$s(x)$ yaitu sebarang fungsi-fungsi yang diberikan dan c yaitu sebarang konstanta. Jika $y(x) = y, p(x) = p, q(x) = q, r(x) = r, s(x) = s, cp + q = u,$ dan $cr + s = v$ maka turunan persamaan (1) diperoleh:

$$y = \frac{cp+q}{cr+s}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{cp' + q'}{cr + s} - y\left(\frac{cr' + s'}{cr + s}\right) \tag{2}$$

Penyelesaian c untuk persamaan (2) diperoleh:

$$c = \frac{sy - q}{p - ry} \tag{3}$$

Penyelesaian c untuk persamaan (3) diperoleh:

$$c = \frac{sy' + s'y - q'}{p' - ry' - r'y} \tag{4}$$

Dari persamaan (4) dan (5) diperoleh:

$$\frac{sy-q}{p-ry} = \frac{sy' + s'y - q'}{p' - ry' - r'y} \tag{5}$$

$$-(ps - qr)y' + (rs' - r's)y^2 + (p's + qr' - ps' - q'r)y = -(pq' - p'q) \tag{6}$$

Misalkan $W = ps - qr$ maka persamaan (6) menjadi

$$-Wy' + (rs' - r's)y^2 + (p's + qr' - ps' - q'r)y = -(pq' - p'q) \quad (7)$$

Persamaan (7) dikali dengan W^{-1}

$$-y' + \frac{(rs' - r's)}{W}y^2 + \frac{(p's + qr' - ps' - q'r)}{W}y = -\frac{(pq' - p'q)}{W} \quad (8)$$

Jika

$$R(x) = \frac{rs' - r's}{W}; Q(x) = \frac{p's + qr' - ps' - q'r}{W}; P(x) = \frac{pq' - p'q}{W}$$

Untuk $W \neq 0$, mka persamaan (8) menjadi

$$-y' + R(x)y^2 + Q(x) = -P(x)$$

atau

$$-\frac{dy}{dx} + R(x)y^2 + Q(x) = -P(x) \quad (9)$$

Persamaan (9) dikalikan dengan (-1) menjadi

$$\frac{dy}{dx} = R(x)y^2 + Q(x)y + P(x) \quad (10)$$

dimana $R(x) \neq 0$. Persamaan (10) disebut persamaan Riccati.

III. METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON

Diberikan persamaan diferensial non linear orde satu dengan nilai awal $(x_0) = y_0$ sebagai berikut:

$$y' = f(x,y(x)) \quad (11)$$

Persamaan (11) diintegralkan dari x_n sampai $x_{n+1} = x_n + h$ untuk mendapatkan penyelesaian y_{n+1} pada titik x_{n+1}, sehingga diperoleh:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y(x))\, dx \quad (12)$$

Apabila $f(x,y(x))$ merupakan persamaan yang kompleks yang tidak dapat diintegralkan, $f(x,y(x))$ diganti dengan polynomial interpolasi $p(x)$ agar dapat diintegralkan lebih jauh lagi.

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} p(x)\, dx \quad (13)$$

Interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga dipilih untuk mendapatkan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat. Rumus interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga dapat dituliskan sebagai berikut:

$$p_3(x) = f_n + r\nabla f_n + \tfrac{1}{2}r(r+1)\nabla^2 f_n + \tfrac{1}{6}r(r+1)(r+2)\nabla^3 f_n \quad (14)$$

dengan

$$r = \frac{x - x_n}{h}.$$

Kemudian polinomial $p_3(x)$ diintegralkan dari x_n sampai $x_{n+1} = x_n + h$. Jika $x = x_n$ dan $x = x_{n+1}$ masing-masing disubstitusi ke dalam persamaan $r = \frac{x - x_n}{h}$ maka berturut-turut akan diperoleh $r = 0$ dan $r = 1$. Dikarenakan $x = x_n + hr$ dan jika x diturunkan terhadap variabel r, maka diperoleh $dx = h.dr$.

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} p_3(x)dx = h\int_0^1 \left(f_n + r\nabla f_n + \tfrac{1}{2}r(r+1)\nabla^2 f_n + \tfrac{1}{6}r(r+1)(r+2)\nabla^3 f_n\right)dr$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} p_3(x)dx = h\left(f_n + \tfrac{1}{2}\nabla f_n + \tfrac{5}{12}\nabla^2 f_n + \tfrac{3}{8}\nabla^3 f_n\right) \quad (15)$$

Didefinisikan bahwa $\nabla^{k} f_j = \nabla^{k-1} f_j - \nabla^{k-1} f_{j-1}$, oleh karena itu diperoleh:

$$\nabla f_n = f_n - f_{n-1} \quad (16)$$
$$\nabla^2 f_n = \nabla f_n - \nabla f_{n-1} = f_n - 2f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$\nabla^3 f_n = \nabla^2 f_n - \nabla^2 f_{n-1} = f_n - 3f_{n-1} + 3f_{n-2} - f_{n-3}$$

Apabila persamaan (16) disubstitusikan ke persamaan (15), maka akan diperoleh metode Adams-Bashforth orde empat berikut:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \tfrac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}) \quad (17)$$

Sebelumnya, pada metode Adam-Bashforth digunakan interpolasi selisih mundur Newton derajat tiga yang menginterpolasi $f(x,y(x))$ pada titik $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}$. Metode Adam-Moulton orde empat dapat diperoleh jika polinomial $p(x)$ pada persamaan (13) merupakan polinomial interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga yang menginterpolasi $f(x,y(x))$ di titik $x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}$ yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\overline{p}_3(x) = f_{n+1} + r\nabla f_{n+1} + \tfrac{1}{2}r(r+1)\nabla^2 f_{n+1} + \tfrac{1}{6}r(r+1)(r+2)\nabla^3 f_{n+1} \quad (18)$$

dengan

$$r = \frac{x - x_{n+1}}{h}.$$

Sekarang polinomial $\overline{p}_3(x)$ diintegralkan terhadap variabel x dari titik x_n sampai $x_{n+1} = x_n + h$, hal ini bersesuaian dengan pengintegralan $\overline{p}_3(x)$ terhadap variabel r dari -1 sampai 0.

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \overline{p}_3(x)\, dx = h\int_{-1}^{0} \overline{p}_3(x)\, dr$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \overline{p}_3(x)\, dx = h\left(f_{n+1} - \tfrac{1}{2}\nabla f_{n+1} - \tfrac{1}{12}\nabla^2 f_{n+1} - \tfrac{1}{24}\nabla^3 f_{n+1}\right) \quad (19)$$

Kemudian ditinjau kembali persamaan $\nabla^k f_j = \nabla^{k-1} f_j - \nabla^{k-1} f_{j-1}$ untuk $k = 1,2,3$ dan hasilnya disubtitusikan ke persamaan (19) maka diperoleh metode Adams-Moulton orde empat yaitu:

$$y_{n+1}^{(k)} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}) \quad (20)$$

dengan $k = 1,2,3,...$ yang menunjukkan bahwa persamaan (20) dapat diselesaikan secara iterasi. Untuk menggunakan persamaan (20), diperlukan nilai prediksi y_{n+1} yang merupakan hasil dari penggunaan persamaan (17).

IV. PENYELESAIAN PERSAMAAN RICCATI DENGAN METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON

Berikut diberikan beberapa contoh persamaan Riccati yang diselesaikan dengan metode Adams-Bashforth-Moulton:

Diberikan masalah nilai awal persamaan Riccati:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 2y - y^2 , \quad y(0) = 0 \tag{21}$$

Dari masalah nilai awal tersebut diketahui bahwa $x_0 = 0$ dan $y_0 = 0$ serta $f(x,y) = 1 + 2y - y^2$ dengan ukuran langkah h misal $h = 0,1$. Dengan metode Runge Kutta orde empat diperoleh penyelesaian awal y_1, y_2, dan y_3 yaitu:

Tabel 1. Penyelesaian Awal Menggunakan Metode Runge Kutta Orde Empat

n	x_n	y_n	f(x,y)=1+2y-y^2
0	0	0	1
1	0,1	0,11029	1,20842
2	0,2	0,24197	1,42539
3	0,3	0,39510	1,63409

Akan dicari nilai y_4 dengan mensubtitusi empat nilai awal pada Tabel 1 ke persamaan prediktor yaitu persamaan Adams Bashforth orde empat sehingga diperoleh:

$$y_{n+1}{}^{(0)} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

$$y_4{}^{(0)} = y_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0)$$

$$= 0,56797$$

diperoleh

$$f_4(x_4,y_4) = f(0,4\,, 0,56) = 1 + 2(0,56) - (0,56)^2 = 1,81.$$

Kemudian memperbaiki hasil prediksi menggunakan persamaan korektor yaitu persamaan Adams Moulton orde empat sehingga diperoleh:

$$y_{n+1}{}^{(1)} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

$$y_4^{(1)} = y_3 + \frac{h}{24}(9f_4 + 19f_3 - 5f_2 + f_1)$$

$$= 0,5678$$

Selanjutnya dilakukan iterasi hingga galat relatif telah memenuhi kriteria pemberhentian tertentu, misal $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$.

Untuk mendekati galat yang telah ditentukan dengan jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan Tabel 2 maka dilakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah h, digunakan penyelesaian numerik yang telah diperoleh untuk menghitung nilai,

$$\frac{19}{270}\frac{\left|y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}\right|}{\left|y_{n+1}^{(1)}\right|} = \frac{19}{270}\frac{\left|y_4^{(1)} - y_4^{(0)}\right|}{\left|y_4^{(1)}\right|}$$

$$\frac{19}{270}\frac{\left|y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}\right|}{\left|y_{n+1}^{(1)}\right|} = \frac{19}{270}\frac{|0,56780 - 0,56797|}{|0,56780|}$$

$$= 2,02127 \times 10^{-5}$$

Tabel 2. Iterasi dengan Ukuran Langkah *h=0,1*

n	x_n	h=0,1		Galat Realtif
		$y_n^{(0)}$	$y_n^{(1)}$	
0	0			
1	0,1			
2	0,2			
3	0,3			
4	0,4	0,56797	0,56780	2,87234x10^{-4}
5	0,5	0,75608	0,75602	7,33898×10^{-5}
6	0,6	0,95339	0,95358	1,93478×10^{-4}
7	0,7	1,15263	115297	2,96416×10^{-4}
8	0,8	1,34596	134640	3,28647×10^{-4}
9	0,9	1,52655	152696	2,68065×10^{-4}
10	1,0	1,68928	168954	1,50604×10^{-5}
11	1,1	1,83120	183125	3,04014×10^{-5}
12	1,2	1,95146	195134	5,84109×10^{-5}
13	1,3	2,05090	205069	9,99744×10^{-5}
14	1,4	2,13149	213127	1,03698×10^{-4}
15	1,5	2,19576	219558	8,32483×10^{-5}
16	1,6	2,24637	224624	5,72962×10^{-5}
17	1,7	2,28581	228574	3,18224×10^{-5}
18	1,8	2,31633	231630	1,54194×10^{-5}
19	1,9	2,33979	233979	2,05986×10^{-6}
20	2,0	2,35776	235776	1,66936×10^{-6}

Diperoleh $2,02127 \times 10^{-5} > 1 \times 10^{-6}$, sehingga ukuran langkah h harus diubah menjadi $\frac{h}{2}$ maka *h=0,05* kemudian dihitung kembali empat penyelesaian awal menggunakan metode Runge Kutta orde empat.

Berikut ini adalah tabel dari penyelesaian menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat dengan *h=0,05* pada Tabel 3.

Pada Tabel 3, terlihat bahwa iterasi yang terjadi belum memenuhi galat yang telah ditentukan. Agar lebih mendekati dengan galat yang telah ditentukan maka kembali dilakukan analisis pemilihan ukuran langkah h yaitu kembali digunakan penyelesaian numerik yang telah diperoleh untuk menghitung nilai,

$$\frac{19}{270}\frac{\left|y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}\right|}{\left|y_{n+1}^{(1)}\right|} = \frac{19}{270}\frac{\left|y_4^{(1)} - y_4^{(0)}\right|}{\left|y_4^{(1)}\right|}$$

$$\frac{19}{270}\frac{\left|y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}\right|}{\left|y_{n+1}^{(1)}\right|} = \frac{19}{270}\frac{|0,241976 - 0,241983|}{|0,241976|}$$

$$= 2,01068 \times 10^{-6}$$

diperoleh

$$2{,}01068 \times 10^{-6} > 1 \times 10^{-6},$$

sehingga langkah berikutnya kembali digunakan $\frac{h}{2}$ maka $h = 0{,}025$ kemudian dihitung kembali empat penyelesaian awal menggunakan metode Runge Kutta orde empat.

Tabel 2. Iterasi dengan Ukuran Langkah *h=0,05*

n	x_n	h=0,05		Galat Relatif
		$y_n^{(0)}$	$y_n^{(1)}$	
0	0			
1	0,05			
2	0,10			
3	0,15			
4	0,20	0,241983	0,241983	$2{,}857280\times10^{-5}$
5	0,25	0,315933	0,315933	$2{,}292719\times10^{-5}$
6	0,30	0,395110	0,395110	$1{,}294062\times10^{-5}$
7	0,35	0,479217	0,479217	$8{,}041256\times10^{-6}$
8	0,40	0,567814	0,567814	$2{,}691161\times10^{-6}$
9	0,45	0,660316	0,660316	$2{,}537223\times10^{-6}$
10	0,50	0,756009	0,756009	$6{,}576387\times10^{-6}$
11	0,55	0,854063	0,854063	$9{,}709054\times10^{-6}$
12	0,60	0,953555	0,953555	$1{,}182194\times10^{-5}$
13	0,65	1,053511	1,053511	$1{,}279826\times10^{-5}$
14	0,70	1,152935	1,152935	$1{,}270673\times10^{-5}$
15	0,75	1,250853	1,250853	$1{,}167929\times10^{-5}$
16	0,80	1,346351	1,346351	$9{,}925970\times10^{-6}$
17	0,85	1,438603	1,438603	$7{,}707364\times10^{-6}$
18	0,90	1,526904	1,526904	$5{,}294907\times10^{-6}$
19	0,95	1,610678	1,610678	$2{,}936696\times10^{-6}$

Berikut ini adalah tabel dari penyelesaian menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat dengan *h=0,025*.

Tabel 3. Iterasi dengan Ukuran Langkah *h=0,025*

n	x_n	h=0,05		Galat Relatif
		$y_n^{(0)}$	$y_n^{(1)}$	
0	0			
1	0,025			
2	0,050			
3	0,075			
4	0,100	0,110295	0,110295	$1{,}967734\times10^{-6}$
5	0,125	0,141180	0,141180	$1{,}658536\times10^{-6}$
6	0,150	0,173420	0,173420	$1{,}239591\times10^{-6}$
7	0,175	0,207019	0,207019	$1{,}068719\times10^{-6}$

Dari Tabel 4 terlihat bahwa galat relatif telah memenuhi kriteria pemberhentian $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$ pada iterasi ke- 7 berarti iterasi yang diperoleh pada $h = 0{,}025$ lebih sedikit dibandingkan nilai langkah h sebelumnya. Jika dilakukan analisis pemilihan ukuran langkah h maka akan diperoleh:

$$\frac{19}{270}\frac{\left|y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}\right|}{\left|y_{n+1}^{(1)}\right|} = \frac{19}{270}\frac{\left|y_4^{(1)} - y_4^{(0)}\right|}{\left|y_4^{(1)}\right|}$$

$$\frac{19}{270}\frac{\left|y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}\right|}{\left|y_{n+1}^{(1)}\right|} = \frac{19}{270}\frac{|0{,}110295 - 0{,}110295|}{|0{,}110295|}$$
$$= 1{,}384702 \times 10^{-7}$$

Dari hasil tersebut terlihat bahwa $1 \times 10^{-8} < 1{,}384702 \times 10^{-7} < 1 \times 10^{-6}$, sehingga langkah berikutnya digunakan h yang sama berarti iterasi dihentikan pada iterasi ke- 7 dengan $y(0{,}175) = 0{,}207019$.

Dengan demikian, penyelesaian numerik persamaan diferensial $y' = 1 + 2y - y^2$ dengan nilai awal $x_0 = 0$ dan $y_0 = 0$ dengan ukuran langkah $h = 0{,}025$ telah optimal dan penyelesaian numerik yang dihasilkan telah memenuhi kriteria pemberhentian $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$.

Diberikan masalah nilai awal persamaan Riccati:

$$y'(x) = e^x - e^{3x} + 2e^{2x}y - e^x y^2, \quad y(0) = 1$$

Dari masalah nilai awal tersebut diketahui bahwa $x_0 = 0$ dan $y_0 = 1$serta

$$f(x,y) = e^x - e^{3x} + 2e^{2x}y - e^x y^2 \qquad (22)$$

dengan ukuran langkah h misal $h = 0{,}1$. Dengan metode Runge Kutta orde empat diperoleh penyelesaian awal y_1, y_2, dan y_3 yaitu:

Tabel 3. Iterasi dengan Ukuran Langkah *h=0,025*

n	x_n	y_n	$f(x,y)=e^x-e^{3x}+2e^{2x}y-e^xy^2$
0	0	1	1
1	0,1	1,10517	1,10517
2	0,2	1,23000	1,22131
3	0,3	1,35928	1,34974

Akan dicari nilai y_4 dengan mensubtitusi empat nilai awal pada Tabel 5 ke persamaan prediktor yaitu persamaan Adams Bashforth orde empat sehingga diperoleh:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$
$$y_4^{(0)} = y_3 + \frac{h}{24}(55f_3 - 59f_2 + 37f_1 - 9f_0)$$
$$= 1{,}50124$$

diperoleh

$$f_4(x_4,y_4) = f(0{,}4\,,1{,}5)$$
$$= e^{(0,4)} - e^{3(0,4)} + 2e^{2(0,4)}(1{,}5)$$
$$- e^{(0,4)}(1{,}5)^2 = 1{,}49$$

Kemudian memperbaiki hasil prediksi menggunakan persamaan korektor yaitu persamaan Adams Moulton orde empat sehingga diperoleh:

$$y_{n+1}^{(1)} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$
$$y_4^{(1)} = y_3 + \frac{h}{24}(9f_4 + 19f_3 - 5f_2 + f_1)$$
$$= 1{,}501237$$

Selanjutnya dilakukan iterasi hingga galat relatif telah memenuhi kriteria pemberhentian tertentu, misal $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$. Untuk lebih mendekati galat yang telah ditentukan dengan jumlah iterasi yang lebih sedikit dibandingkan pada Tabel 6 maka dilakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah h, digunakan penyelesaian numerik yang telah diperoleh untuk menghitung nilai

$$\frac{19}{270}\frac{\left|y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}\right|}{\left|y_{n+1}^{(1)}\right|} = \frac{19}{270}\frac{\left|y_4^{(1)} - y_4^{(0)}\right|}{\left|y_4^{(1)}\right|}$$

$$\frac{19}{270}\frac{\left|y_{n+1}^{(1)} - y_{n+1}^{(0)}\right|}{\left|y_{n+1}^{(1)}\right|} = \frac{19}{270}\frac{|1{,}50124 - 1{,}50124|}{|1{,}50124|} = 1{,}26464 \times 10^{-7}$$

Tabel 4. Iterasi dengan Ukuran Langkah *h=0,1*

n	x_n	h=0,1		Galat Relatif
		$y_n^{(0)}$	$y_n^{(1)}$	
0	0			
1	0,1			
2	0,2			
3	0,3			
4	0,4	1,50124	1,50124	$1{,}79711\times10^{-6}$
5	0,5	1,65811	1,65811	$3{,}62824\times10^{-6}$
6	0,6	1,83150	1,83150	$3{,}41699\times10^{-6}$
7	0,7	2,02311	2,02311	$3{,}07589\times10^{-6}$
8	0,8	2,23488	2,23488	$3{,}05926\times10^{-6}$
9	0,9	2,46892	2,46892	$3{,}06283\times10^{-6}$
10	1,0	2,72758	2,72758	$3{,}06502\times10^{-6}$

diperoleh

$$1 \times 10^{-8} < 1{,}26464 \times 10^{-7} < 1 \times 10^{-6}$$

sehingga ukuran langkah h yang digunakan tetap.

Dengan demikian, nilai h yang digunakan tetap yaitu $h = 0{,}1$ sehingga penyelesaian numerik persamaan diferensial $y' = e^x - e^{3x} + 2e^{2x}y - e^x y^2$ dengan nilai awal $x_0 = 0$ dan $y_0 = 1$ telah optimal dan penyelesaian numerik yang dihasilkan telah memenuhi kriteria pemberhentian $\varepsilon = 1 \times 10^{-6}$.

V. KESIMPULAN

Persamaan Riccati dapat diperoleh dari memanipulasi suatu persamaan sebarang sehingga diperoleh bentuk persamaan umum Riccati. Metode Adams-Bashforth-Moulton orde empat diperoleh dengan menggunakan interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga yaitu pada persamaan prediksi digunakan interpolasi selisih mundur Newton derajat tiga yang menginterpolasi $f(x,y(x))$ pada titik x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3} serta pada persamaan korektor digunakan interpolasi selisih mundur Newton berderajat tiga yang menginterpolasi $f(x,y(x))$ di titik x_{n+1}, x_n, x_{n-1}, x_{n-2}. Selain itu, dapat dilakukan analisis kriteria pemilihan ukuran langkah h apabila kriteria pemberhentian tidak terpenuhi.

REFERENSI

[1] Wartono dan M. N. Muhaijir, “Penyelesaian Persamaan Riccati dengan Menggunakan Metode Dekomposisi Adomian Laplace,” in *Jurnal Sains Teknologi dan Industri*, Vol. 10, No.2, 2013.

[2] T. A. Nurman dan S. Abdullah, “Penerapan Metode Adams-Bashforth-Moulton Pada Persamaan Logistik Dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk Di Provinsi Sulawesi Selatan,” in Jurnal MSA, Vol. 5, No 1, 2017.

[3] P. Benner dan H. Mena, “Rosenbrock Method for Solving Riccati Differential Equations,” in *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 58, Issue 11, 2007.

[4] Muliani, “Solusi Persamaan Diferensial Riccati dengan Metode Dekomposisi Adomian Sumudu,” Makassar: Universitas Negeri Makassar, 2016.

[5] G. Roba dan K. Hailu, “Fifth Order Predictor-Corrector Method for Quadratic Riccati Differensial Equatio,” in *International Journal of Engineering & Applied Sciences (IJEAS)*, Vol 9, Issue 4, 2017.

[6] S. Abdullah, “Penerapan Metode Adams-Bashforth-Moulton pada Persamaan Logistik dalam Memprediksi Pertumbuhan Penduduk di Provinsi Sulawesi Selatan,” Makassar: Universitas Islam Negeri Alauddin, 2016.

[7] M. M. Jamei, G. V. Milovanovic dan A. H.S. Shayegan, “On Weighted Adams-Bashforth Rules,” in *Mathematical Communications*, 2017.

[8] F. M. Sari, Yundari dan Helmi, “Penyelesaian Numerik Persamaan Diferensial Linear Homogen dengan Koefisien Konstan Menggunakan Metode Adams Bashforth Moulton,” in *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (Bimaster),* Vol. 03, No 2, 2014.

[9] M. U. Albab, “Analisis Solusi Umum Persamaan Riccati,” Malang: Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim, 2013.

[10] J. H. Mathews dan K. K. Fink, “Numerical Methods Using Matlab. New Jersey: 4th Edition,” Prentice-Hall Inc., 2004.