

# Pelabelan $-k$ Total Sisi Tak Reguler pada Graf Tas dan Graf Pura

Meryta Febrilian Fatimah<sup>1</sup>, Eka Putri Ayu Lestari<sup>2</sup>, Sauki<sup>3</sup>

<sup>1, 2, 3</sup>Program Studi Matematika, Universitas Sulawesi Barat, Indonesia

e-mail: <sup>1</sup>merytaff@unsulbar.ac.id, <sup>2</sup>ekaputriayulestari014@gmail.com, <sup>3</sup>sauki2710@gmail.com

**Abstrak.** Diberikan  $G$  adalah graf terhubung dan sederhana dengan himpunan titik dan sisi yaitu berturut-turut dinotasikan dengan  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dan  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ . Pelabelan  $-k$  total sisi tak reguler dari graf  $G$  adalah setiap sisi memiliki bobot yang berbeda. Nilai  $k$  terkecil yang terdapat pada pelabelan  $-k$  total sisi tak reguler disebut kekuatan tak reguler sisi total dari  $G$  yang dinotasikan dengan  $tes(G)$ . Pada tulisan ini, penulis meneliti kekuatan tak reguler sisi total dari graf tas dan graf pura. Graf tas dinotasikan dengan  $Ts(n)$  dengan nilai  $tes(Ts(1)) = 11$  dan graf pura dinotasikan dengan  $Pu(n)$  dengan nilai  $tes(Pu(4)) = 19$ .

**Kata kunci:** pelabelan total sisi tak reguler, graf tas, graf pura

**Abstract.** Given that  $G$  is a simple and connected graph with a set of points and sides, that is, denoted  $(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  and  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  respectively. The labeling  $-k$  total of irregular edges of graph  $G$  is that each edge has a different weight. The smallest  $k$  value contained in the labeling  $-k$  total irregular edges is called the irregular strength of the total side of  $G$  which is denoted by the test  $(G)$ . In this paper, the author examines the irregular strength of the total side of the bag graph and the temple graph. The bag graph is denoted by  $Ts(n)$  with the test value  $(Ts(1)) = 11$  and the temple graph is denoted by  $Pu(n)$  with the test value  $(Pu(4)) = 19$ .

**Keywords:** irregular side total labeling, bag graf, pura graf

## I. PENDAHULUAN

Pada beberapa tahun belakangan, teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika yang telah berkembang cukup pesat. Di antara berbagai macam konsep dalam teori graf, salah satu konsep yang cukup populer adalah konsep mengenai pelabelan graf. Pada 50 tahun terakhir, hampir 200 teknik pelabelan graf yang sudah diteliti dan menghasilkan 2000 artikel. Sebuah survey pelabelan graf oleh Joseph Gallian telah memberikan informasi yang sangat berguna terkait jenis pelabelan yang telah dilakukan.

Baca, *et al.* [2] mendefinisikan pelabelan graf  $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  yang kemudian disebut sebagai pelabelan  $-k$  total. Pelabelan  $-k$  total sisi tak reguler dari graf  $G$  adalah pelabelan  $-k$  total sedemikian sehingga bobot dari semua sisinya berbeda. Bobot dari sisi  $uv$  di  $G$  dinotasikan dengan  $wt(uv)$  dan didefinisikan sebagai jumlah label dari  $u$ , label  $v$  dan label  $uv$ , yaitu

$$wt(uv) = f(u) + f(uv) + f(v),$$

sedangkan kekuatan tak reguler sisi total dari  $G$ , dinotasikan dengan  $tes(G)$ , adalah nilai terkecil dari label terbesar  $k$  atas semua sisi tak reguler dengan pelabelan  $-k$  total.

Kekuatan tak reguler sisi total untuk berbagai kelas graf telah ditentukan. Untuk singkatnya [2] mengkonstruksikan batas bawah dan batas atas dari kekuatan tak reguler sisi total untuk sebarang graf  $G$  dengan himpunan titik  $V(G)$

dan himpunan sisi tak kosong  $E(G)$ , yaitu  $\left\lfloor \frac{|E(G)|+2}{3} \right\rfloor \leq tes(G) \leq |E(G)|$ . Batas bawah dari kekuatan tak reguler sisi total untuk graf  $G$  dengan derajat terbesar  $\Delta$ ,  $\left\lfloor \frac{\Delta+1}{2} \right\rfloor \leq tes(G)$ . Penelitian terdahulu, mengacu pada [3] dan [4], telah dibuktikan bahwa kekuatan tak reguler sisi total dari *path*, *cycle*, *star*, roda dan graf *friendship*, yaitu  $tes(P_n) = tes(C_n) = \left\lfloor \frac{n+2}{3} \right\rfloor$ ,  $tes(K_{1,n}) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$ ,  $tes(W_n) = \left\lfloor \frac{2n+2}{3} \right\rfloor$  untuk  $n \geq 3$ ,  $tes(F_n) = \left\lfloor \frac{3n+2}{3} \right\rfloor$  secara berurutan. Penelitian ini bertujuan untuk meneliti kekuatan tak reguler sisi total dari graf tas dan graf pura.

## II. LANDASAN TEORI

Pada [2] didefinisikan pelabelan graf  $f: V(G) \cup E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  sebagai pelabelan  $-k$  total. Pelabelan  $-k$  total sisi tak reguler dari graf  $G$  adalah pelabelan  $-k$  total sedemikian sehingga bobot dari semua sisinya berbeda. Bobot dari sisi  $uv$  di  $G$ , dinotasikan sebagai  $wt(uv)$ , didefinisikan sebagai jumlah label dari  $u$ , label  $v$ , dan label  $uv$ , yaitu

$$wt(uv) = f(u) + f(uv) + f(v), \quad (1)$$

sedangkan kekuatan tak reguler sisi total dari  $G$ , dinotasikan  $tes(G)$ , sebagai nilai terkecil dari label terbesar  $k$  atas

semua pelabelan  $-k$  total sisi tak reguler.

### III. METODE

Metode penelitian yang digunakan adalah studi literatur, yaitu dengan mempelajari beberapa jurnal dan buku terkait dengan pelabelan  $-k$  total sisi tak reguler pada suatu graf. Hal ini dilakukan untuk memperoleh definisi dan beberapa sifat terkait pelabelan  $-k$  total sisi tak reguler.

Beberapa langkah yang dilakukan untuk mengkonstruksi pelabelan  $-k$  total sisi tak reguler pada graf tas dan graf pura adalah:

1. Mempelajari definisi dan notasi dalam graf tas dan graf pura.
2. Mengkonstruksi pelabelan graf total tak reguler sisi pada graf tas dan graf pura.
3. Menentukan nilai  $tes$  pada graf tas dan graf pura.

### IV. HASIL DAN PEMBAHASAN

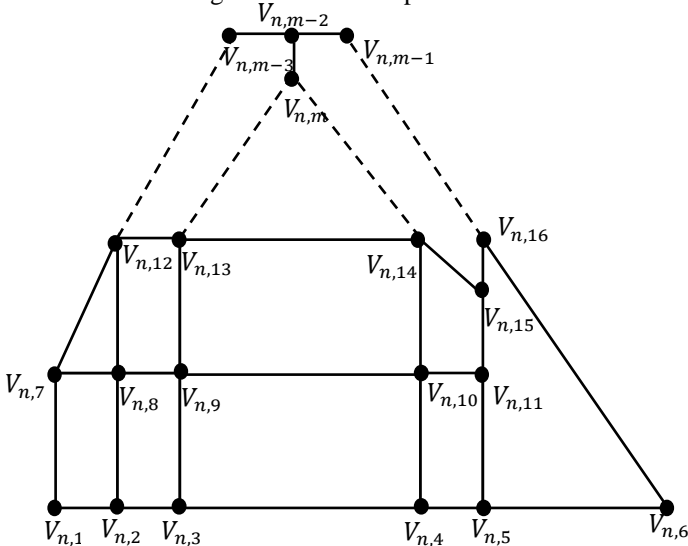
Pada bagian ini akan dikaji pelabelan  $-k$  total sisi tak reguler dari graf tas dan graf pura.

#### 4.1 Pelabelan $-k$ total sisi tak reguler dari graf tas

Graf tas didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 1.** Graf tas adalah graf yang diperoleh dengan menggabungkan graf siklus  $C_4$  dan  $C_3$  yang dibentuk menyerupai sebuah tas dan dihubungkan dengan dua buah graf *path* yang saling terhubung.

Ilustrasi dari graf tas diberikan pada **Gambar 1**.



**Gambar 1.** Graf Tas

Selanjutnya, pelabelan graf tas disajikan pada lemma berikut.

**Lemma 1.** Diberikan graf tas  $Ts(n)$ . Jika  $n = 1$ , maka  $tes(Ts(1)) = 13$ .

**Bukti.** Diperhatikan graf tas dengan  $n = 1$ . Kemudian, diperoleh jumlah titik dan jumlah sisi pada graf  $Ts(1)$  berturut-turut adalah

$$|V(Ts(1))| = 20 \text{ dan } |E(Ts(1))| = 31.$$

Dari sini diperoleh nilai  $tes(Ts(1))$  adalah

$$tes(Ts(1)) = \left\lceil \frac{|E(Ts(1))| + 2}{3} \right\rceil = 11.$$

Sehingga dengan nilai maksimum label pada sisinya 11, diperoleh pelabelan titik pada graf tas  $Ts(1)$ .

$$\begin{aligned} V_{1,1} &= 10 & V_{1,11} &= 9 \\ V_{1,2} &= 11 & V_{1,12} &= 3 \\ V_{1,3} &= 12 & V_{1,13} &= 4 \\ V_{1,4} &= 13 & V_{1,14} &= 3 \\ V_{1,5} &= 14 & V_{1,15} &= 4 \\ V_{1,6} &= 15 & V_{1,16} &= 3 \\ V_{1,7} &= 5 & V_{1,17} &= 1 \\ V_{1,8} &= 6 & V_{1,18} &= 1 \\ V_{1,9} &= 7 & V_{1,19} &= 2 \\ V_{1,10} &= 8 & V_{1,20} &= 3. \end{aligned}$$

Lebih lanjut, pelabelan sisi pada graf tas  $Ts(1)$ , yaitu:

$$\begin{aligned} V_{1,1}V_{1,2} &= 8 & V_{1,6}V_{1,16} &= 10 \\ V_{1,2}V_{1,3} &= 7 & V_{1,7}V_{1,8} &= 8 \\ V_{1,3}V_{1,4} &= 6 & V_{1,8}V_{1,9} &= 7 \\ V_{1,4}V_{1,5} &= 5 & V_{1,9}V_{1,10} &= 6 \\ V_{1,5}V_{1,6} &= 4 & V_{1,10}V_{1,11} &= 5 \\ V_{1,1}V_{1,7} &= 8 & V_{1,12}V_{1,13} &= 3 \\ V_{1,2}V_{1,8} &= 7 & V_{1,13}V_{1,14} &= 4 \\ V_{1,3}V_{1,9} &= 6 & V_{1,15}V_{1,16} &= 6 \\ V_{1,4}V_{1,10} &= 5 & V_{1,12}V_{1,17} &= 2 \\ V_{1,5}V_{1,11} &= 4 & V_{1,13}V_{1,20} &= 2 \\ V_{1,7}V_{1,12} &= 6 & V_{1,14}V_{1,20} &= 2 \\ V_{1,8}V_{1,12} &= 6 & V_{1,16}V_{1,19} &= 2 \\ V_{1,9}V_{1,13} &= 5 & V_{1,17}V_{1,18} &= 1 \\ V_{1,10}V_{1,14} &= 6 & V_{1,18}V_{1,19} &= 1 \\ V_{1,11}V_{1,15} &= 5 & V_{1,18}V_{1,20} &= 1. \\ V_{1,15}V_{1,14} &= 5 \end{aligned}$$

Selanjutnya, sesuai dengan definisi dari pelabelan  $-k$  total sisi tak reguler bahwa masing-masing bobot sisi harus berbeda, diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} wt(V_{1,17}V_{1,18}) &= 3 & wt(V_{1,7}V_{1,8}) &= 19 \\ wt(V_{1,18}V_{1,19}) &= 4 & wt(V_{1,8}V_{1,9}) &= 20 \\ wt(V_{1,18}V_{1,20}) &= 5 & wt(V_{1,9}V_{1,10}) &= 21 \\ wt(V_{1,12}V_{1,17}) &= 6 & wt(V_{1,10}V_{1,11}) &= 22 \\ wt(V_{1,16}V_{1,19}) &= 7 & wt(V_{1,1}V_{1,7}) &= 23 \\ wt(V_{1,14}V_{1,20}) &= 8 & wt(V_{1,2}V_{1,8}) &= 24 \\ wt(V_{1,13}V_{1,20}) &= 9 & wt(V_{1,3}V_{1,9}) &= 25 \\ wt(V_{1,12}V_{1,13}) &= 10 & wt(V_{1,4}V_{1,10}) &= 26 \\ wt(V_{1,13}V_{1,14}) &= 11 & wt(V_{1,5}V_{1,11}) &= 27 \\ wt(V_{1,15}V_{1,14}) &= 12 & wt(V_{1,6}V_{1,16}) &= 28 \\ wt(V_{1,15}V_{1,16}) &= 13 & wt(V_{1,1}V_{1,2}) &= 29 \\ wt(V_{1,7}V_{1,12}) &= 14 & wt(V_{1,2}V_{1,3}) &= 30 \\ wt(V_{1,8}V_{1,12}) &= 15 & wt(V_{1,3}V_{1,4}) &= 31 \\ wt(V_{1,9}V_{1,13}) &= 16 & wt(V_{1,4}V_{1,5}) &= 32 \\ wt(V_{1,10}V_{1,14}) &= 17 & wt(V_{1,5}V_{1,6}) &= 33. \\ wt(V_{1,11}V_{1,15}) &= 18 \end{aligned}$$

#### 4.2 Pelabelan $-k$ total sisi tak reguler dari graf pura

Graf pura didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi 2.** Graf pura adalah graf yang diperoleh dari menggabungkan graf sikel  $C_4$  dan  $C_3$  yang dibentuk menyerupai sebuah pura.

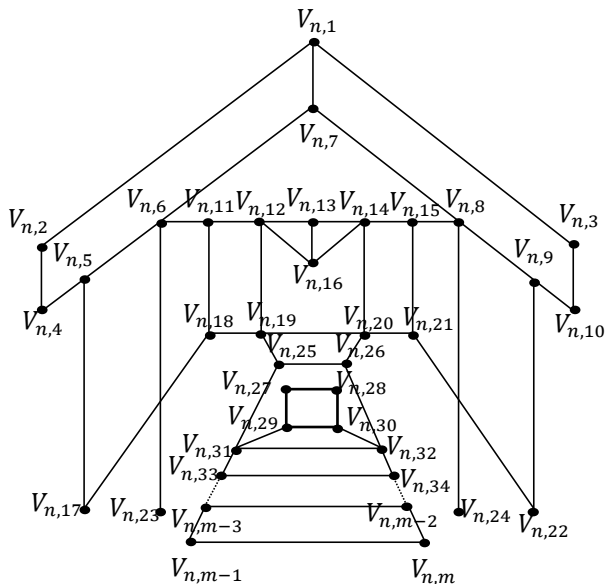
Selanjutnya, pelabelan graf pura disajikan pada lemma berikut.

**Lemma 2.** Diberikan graf pura  $Pu(n)$ . Jika  $n = 4$ , maka  $tes(Pu(4)) = 19$ .

**Bukti.** Diperhatikan graf pura dengan  $n = 4$ . Kemudian, diperoleh bahwa jumlah titik dan jumlah sisi pada graf  $Pu(4)$  berturut-turut adalah

$$|V(Pu(4))| = 38 \text{ dan } |E(Pu(4))| = 53.$$

Ilustrasi graf pura diberikan pada **Gambar 2**.



**Gambar 2.** Graf Pura

Dari sini diperoleh nilai  $tes(Pu(4))$  adalah

$$tes(Pu(4)) = \left\lfloor \frac{|E(Pu(4))| + 2}{3} \right\rfloor = 19.$$

Sehingga dengan nilai maksimum label pada sisinya 19, diperoleh pelabelan titik pada graf pura  $Pu(4)$ .

$V_{4,1} = 1$	$V_{4,11} = 7$	$V_{4,21} = 6$	$V_{4,31} = 23$
$V_{4,2} = 1$	$V_{4,12} = 11$	$V_{4,22} = 6$	$V_{4,32} = 21$
$V_{4,3} = 2$	$V_{4,13} = 15$	$V_{4,23} = 9$	$V_{4,33} = 26$
$V_{4,4} = 3$	$V_{4,14} = 14$	$V_{4,24} = 12$	$V_{4,34} = 23$
$V_{4,5} = 3$	$V_{4,15} = 8$	$V_{4,25} = 17$	$V_{4,35} = 29$
$V_{4,6} = 4$	$V_{4,16} = 16$	$V_{4,26} = 18$	$V_{4,36} = 25$
$V_{4,7} = 3$	$V_{4,17} = 5$	$V_{4,27} = 17$	$V_{4,37} = 32$
$V_{4,8} = 5$	$V_{4,18} = 5$	$V_{4,28} = 18$	$V_{4,38} = 27$
$V_{4,9} = 4$	$V_{4,19} = 10$	$V_{4,29} = 20$	
$V_{4,10} = 3$	$V_{4,20} = 13$	$V_{4,30} = 19$	

Lebih lanjut, pelabelan sisi pada graf pura  $Pu(4)$ , yaitu:

$V_{4,1}V_{4,2} = 1$	$V_{4,17}V_{4,18} = 5$
$V_{4,1}V_{4,3} = 1$	$V_{4,18}V_{4,19} = 10$
$V_{4,1}V_{4,7} = 1$	$V_{4,19}V_{4,20} = 9$
$V_{4,2}V_{4,4} = 2$	$V_{4,19}V_{4,25} = 11$

$V_{4,3}V_{4,10} = 2$	$V_{4,20}V_{4,21} = 11$
$V_{4,4}V_{4,5} = 2$	$V_{4,20}V_{4,26} = 8$
$V_{4,5}V_{4,6} = 3$	$V_{4,21}V_{4,22} = 7$
$V_{4,5}V_{4,17} = 6$	$V_{4,25}V_{4,26} = 5$
$V_{4,6}V_{4,7} = 5$	$V_{4,25}V_{4,31} = 8$
$V_{4,6}V_{4,11} = 5$	$V_{4,26}V_{4,32} = 7$
$V_{4,6}V_{4,23} = 9$	$V_{4,27}V_{4,28} = 6$
$V_{4,7}V_{4,8} = 5$	$V_{4,27}V_{4,29} = 5$
$V_{4,8}V_{4,9} = 2$	$V_{4,28}V_{4,30} = 6$
$V_{4,8}V_{4,15} = 7$	$V_{4,29}V_{4,30} = 5$
$V_{4,8}V_{4,24} = 10$	$V_{4,29}V_{4,31} = 4$
$V_{4,9}V_{4,10} = 2$	$V_{4,30}V_{4,32} = 5$
$V_{4,9}V_{4,22} = 8$	$V_{4,31}V_{4,32} = 5$
$V_{4,11}V_{4,12} = 5$	$V_{4,31}V_{4,33} = 4$
$V_{4,11}V_{4,18} = 5$	$V_{4,32}V_{4,34} = 7$
$V_{4,12}V_{4,13} = 8$	$V_{4,33}V_{4,34} = 6$
$V_{4,12}V_{4,16} = 6$	$V_{4,33}V_{4,35} = 4$
$V_{4,12}V_{4,19} = 5$	$V_{4,34}V_{4,36} = 9$
$V_{4,13}V_{4,14} = 6$	$V_{4,35}V_{4,36} = 7$
$V_{4,13}V_{4,16} = 6$	$V_{4,35}V_{4,37} = 4$
$V_{4,14}V_{4,15} = 6$	$V_{4,36}V_{4,38} = 11$
$V_{4,14}V_{4,16} = 6$	$V_{4,37}V_{4,38} = 8$
$V_{4,14}V_{4,20} = 4$	
$V_{4,15}V_{4,21} = 10$	

Selanjutnya, sesuai dengan definisi dari pelabelan  $-k$  total sisi tak reguler bahwa masing-masing bobot sisi harus berbeda, diperoleh hasil sebagai berikut.

$wt(V_{4,1}V_{4,2}) = 3$	$wt(V_{4,19}V_{4,20}) = 32$
$wt(V_{4,1}V_{4,3}) = 4$	$wt(V_{4,12}V_{4,16}) = 33$
$wt(V_{4,1}V_{4,7}) = 5$	$wt(V_{4,12}V_{4,13}) = 34$
$wt(V_{4,2}V_{4,4}) = 6$	$wt(V_{4,13}V_{4,14}) = 35$
$wt(V_{4,3}V_{4,10}) = 7$	$wt(V_{4,14}V_{4,16}) = 36$
$wt(V_{4,4}V_{4,5}) = 8$	$wt(V_{4,13}V_{4,16}) = 37$
$wt(V_{4,9}V_{4,10}) = 9$	$wt(V_{4,19}V_{4,25}) = 38$
$wt(V_{4,5}V_{4,6}) = 10$	$wt(V_{4,20}V_{4,26}) = 39$
$wt(V_{4,8}V_{4,9}) = 11$	$wt(V_{4,25}V_{4,26}) = 40$
$wt(V_{4,6}V_{4,7}) = 12$	$wt(V_{4,27}V_{4,28}) = 41$
$wt(V_{4,7}V_{4,8}) = 13$	$wt(V_{4,27}V_{4,29}) = 42$
$wt(V_{4,5}V_{4,17}) = 14$	$wt(V_{4,28}V_{4,30}) = 43$
$wt(V_{4,17}V_{4,18}) = 15$	$wt(V_{4,29}V_{4,30}) = 44$
$wt(V_{4,6}V_{4,11}) = 16$	$wt(V_{4,30}V_{4,32}) = 45$
$wt(V_{4,11}V_{4,18}) = 17$	$wt(V_{4,26}V_{4,32}) = 46$
$wt(V_{4,9}V_{4,22}) = 18$	$wt(V_{4,29}V_{4,31}) = 47$
$wt(V_{4,21}V_{4,22}) = 19$	$wt(V_{4,25}V_{4,31}) = 48$
$wt(V_{4,8}V_{4,15}) = 20$	$wt(V_{4,31}V_{4,32}) = 49$
$wt(V_{4,6}V_{4,23}) = 22$	$wt(V_{4,32}V_{4,34}) = 51$
$wt(V_{4,11}V_{4,12}) = 23$	$wt(V_{4,31}V_{4,33}) = 53$
$wt(V_{4,15}V_{4,21}) = 24$	$wt(V_{4,33}V_{4,34}) = 55$
$wt(V_{4,18}V_{4,19}) = 25$	$wt(V_{4,34}V_{4,36}) = 57$
$wt(V_{4,12}V_{4,19}) = 26$	$wt(V_{4,33}V_{4,35}) = 59$
$wt(V_{4,8}V_{4,24}) = 27$	$wt(V_{4,35}V_{4,36}) = 61$
$wt(V_{4,14}V_{4,15}) = 28$	$wt(V_{4,36}V_{4,38}) = 63$

$$\begin{aligned} wt(V_{4,20}V_{4,21}) &= 30 & wt(V_{4,35}V_{4,37}) &= 65 \\ wt(V_{4,14}V_{4,20}) &= 31 & wt(V_{4,37}V_{4,38}) &= 67. \end{aligned}$$

#### IV. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil pembahasan, diperoleh bahwa ada pelabelan  $-k$  total tak reguler sisi pada graf tas dan graf pura. Nilai  $tes$  pada graf tas dengan  $n = 1$  adalah 11. Sementara nilai  $tes$  pada graf pura dengan  $n = 4$  adalah 19. Hasil penelitian ini masih berupa angka-angka konkrit untuk bentuk perumuman graf keempat saja. Oleh karena itu, penelitian ini dapat dilanjutkan dengan mencari bentuk umum pelabelan  $-k$  total tak reguler sisi pada graf tas dan graf pura.

#### REFERENSI

- [1] Wilson, J. Robin., *Introduction to Graph Theory*, 4<sup>th</sup> Edition. London: Addison Wesley Longman Limited, 1998.
- [2] M. Bača, S. Jendrol', dan J. Ryan, "On Irregular Total Labelling," *Discrete Math.*, vol. 307, pp. 1378–1388, 2007.
- [3] J. A. Gallian, *A Dynamic Survey of Graph Labelling*, Electron, J, Combin., 2016.
- [4] S. Jendrol', J. Miskuf, R. Sotak, "Total Edge Irregularity Strength of Complete and Complete Bipartite Graphs," in *Notes Discrete Math*, vol. 28. 2017, pp. 281285.